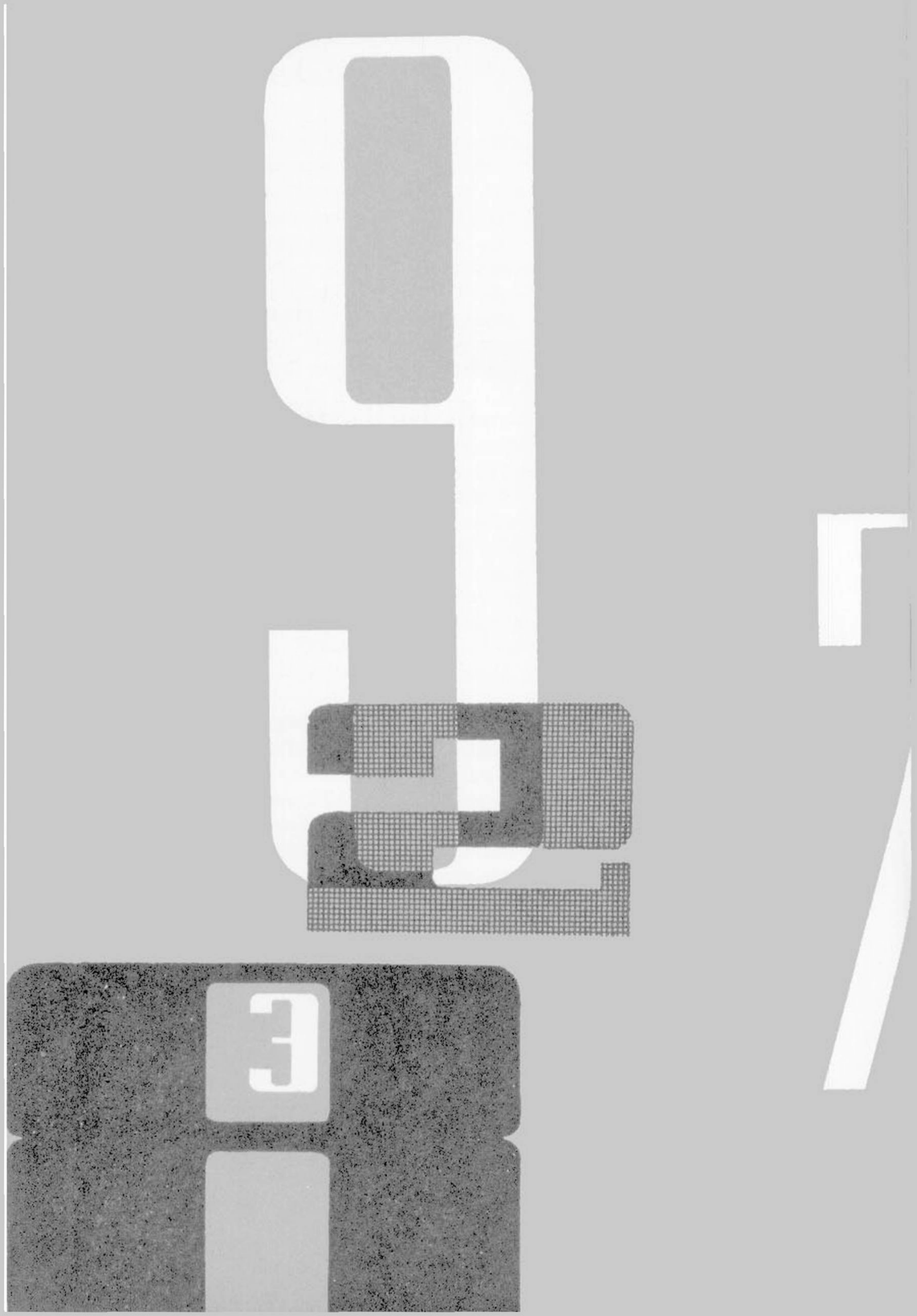
NUMEROS ENTEROS

National Council of Teachers of Mathematics

TEMAS DE MATEMATICAS 2

Colección Temas de matemáticas



2 Números enteros

National Council of
Teachers
of Mathematics
U. S. A.

traducción de
Federico Galván Anaya
profesor de matemáticas
de la U.N.A.M.

Editorial F. Trillas, S. A.
México 1967

Título de esta obra en inglés:
Topics in Mathematics for Elementary School Teachers
Booklet Number 2. The Whole Numbers

Tercera reimpresión en inglés: 1965

Primera edición en español: 1967

Miembro de la Cámara Nacional de
la Industria Editorial. Reg. núm. 158

Impreso en México

Prefacio

Este cuaderno es uno de la serie de ocho, escrita para maestros de enseñanza elemental más bien que para sus alumnos. Cada cuaderno comprende la exposición de un tema básico de matemáticas. Estos temas se hallan entre los que el maestro de enseñanza elemental necesita dominar para tener una comprensión más cabal de la matemática que usualmente se enseña en la escuela de ese grado. Cada cuaderno es la introducción a un tema, no un tratado exhaustivo. El lector interesado debe estudiar el tema con mayor profundidad en otras obras.

Los temas escogidos son especialmente importantes para aquellos maestros que creen que las experiencias de aprendizaje, trasmitidas a los niños del ciclo elemental, deberían empezar por el desarrollo de algunos conceptos unificadores básicos en matemáticas. Muchos profesores han encontrado que su educación profesional no los prepara para enseñar aritmética de modo congruente con este punto de vista. Es el deseo de los autores y del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) que esta serie de cuadernos pueda ser una ayuda para estos profesores, así como para otros que también están interesados en mejorar su instrucción.

Los títulos de los cuadernos de esta serie son:

Cuaderno 1. *Conjuntos*
Cuaderno 2. *Números enteros*
Cuaderno 3. *Sistemas de numeración para los números enteros*
Cuaderno 4. *Algoritmos de las operaciones con números enteros*
Cuaderno 5. *Números y sus factores*
Cuaderno 6. *Números racionales*
Cuaderno 7. *Sistemas de numeración para los números racionales*
Cuaderno 8. *Proposiciones numéricas*

Aconsejamos que, si es posible, los cuadernos sean leídos en el orden numérico correspondiente, con excepción del octavo (*Proposiciones numéricas*), que puede apartarse del orden citado.

Escribieron los cuadernos los miembros de un grupo de verano (Summer Writing Group) cuyos nombres se indican al final de este prefacio. El proyecto fue iniciado y patrocinado por el Comité Suplementario de Publicaciones del NCTM (The NCTM Supplementary Publications Committee) bajo la presidencia de Kenneth B. Henderson. Fue financiado por el NCTM.

Edwin F. Beckenbach
Helen Curran
Walter Fleming
Geraldine Green
Lola May
Marlene Schroeder
Margaret F. Willerding
William Wooton
Lenore John, *Coordinadora*

Indice

Números enteros

Cuaderno 2

INTRODUCCION

No es necesario ser mecánico para manejar un coche; ni tampoco es necesario estudiar la estructura de los sistemas de números y realizar un cálculo para enseñar aritmética de una manera rutinaria. Este cuaderno, sin embargo, está destinado a las personas a quienes gustarían de entender la aritmética y aprovechar su contenido para enseñar a los niños a comprender y a estimar la matemática.

No pocas personas piensan que el aprendizaje de la matemática consiste meramente en aprender a ejecutar las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. Muchos de nosotros desde muy jóvenes aprendimos métodos para resolver estas operaciones y hemos olvidado completamente la forma como las aprendimos. Probablemente empezamos el proceso de aprendizaje memorizando las sumas y multiplicaciones básicas

$$\begin{array}{ll} 1+1=2 & \qquad 1\times 1=1 \\ 1+2=3 & \qquad 1\times 2=2 \\ 1+3=4,\ldots, & \qquad 1\times 3=3,\ldots, \end{array}$$

y practicamos hasta que nuestra respuesta a 6×7 fue —automáticamente— 42.

Por último, descubrimos que $5 + 3 = 3 + 5$, que $7 + 6 = 6 + 7$, y que, en general, la suma de dos números no depende del orden de los sumandos. Esta importante propiedad de los números enteros es llamada *propiedad conmutativa de la suma.* Análogamente, muchos de nosotros descubrimos que $3 \times (4 + 7)$ da el mismo resultado que $(3 \times 4) + (3 \times 7)$, y que $10 \times (8 + 2)$ da el mismo resultado que $(10 \times 8) + (10 \times 2)$. Esta *propiedad distributiva* es también cierta; por lo común para tres números enteros cualesquiera.

Estos son algunos de los hechos que forman la estructura de la aritmética. Su desarrollo estriba en éstas y otras propiedades, algunas de las que trataremos en este cuaderno.

Recordemos la expresión del insigne Gauss: "La matemática es la reina de las ciencias, y la aritmética es la reina de las matemáticas."

LOS NUMEROS ENTEROS*

El conjunto de números enteros contiene los números del conjunto de *números usados para contar* (también llamados *números naturales*)**

$$\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\},$$

y el cero; esto es, que el conjunto de números enteros es:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

Nótese que este conjunto tiene un primer miembro, cero; pero no uno último. Éste es un *conjunto infinito* porque no importa cuántos miembros de este conjunto se hayan nombrado, hay aún otros del conjunto.

ORDEN

Los maestros protestan cuando un alumno de primaria cuenta así: uno, seis, nueve, cuatro, dos, ocho, siete. Su protesta se debe a que el *orden* de los nombres de los números se toma incorrectamente. La gente aprende a temprana edad que hay una manera correcta y otra incorrecta para ordenar los números enteros. Esta propiedad de los números enteros es llamada *propiedad de orden.*

En el cuaderno número 1, relativo a los *conjuntos,* se explica cómo los números enteros pueden ser ordenados por medio de conjuntos estándar. Revisemos algunos de los conceptos básicos desarrollados en ese cuaderno.

Dos conjuntos tales como

$$\{a, b, c, d\}$$

y

$$\{\square, \bigcirc, \square, \triangle\}$$

* Es necesario insistir en que el conjunto de números enteros (*whole numbers*) que se estudiará en este cuaderno no incluye a los enteros negativos; porque en nuestro idioma, al hablar del conjunto de números enteros, nos referimos propiamente al conjunto de enteros positivos, cero y enteros negativos, y no tenemos un término especial para el conjunto de números enteros positivos y cero; en cambio en inglés al conjunto de enteros positivos, cero y negativos se le llama *integers* y al conjunto de enteros positivos y cero se le llama *whole numbers.* También debe observarse que el cero es un entero, pero no es positivo ni negativo (no tiene signo). [N. del T.]

** El cero no es un elemento del conjunto de los números naturales, aunque en algunos casos, por conveniencia, se le considera número natural, sin serlo. [N. del T.]

son *equivalentes,* puesto que entre los elementos de los conjuntos puede establecerse una correspondencia biunívoca.

Los conjuntos ordenados de numerales

{“1”},
{“1”, “2”},
{“1”, “2”, “3”}, etc.,

son llamados *conjuntos estándar.* El conjunto {“1”, “2”, “3”}, es el conjunto estándar para todos los conjuntos que son equivalentes al conjunto $\{a, b, c\}$, y el *número cardinal* de cada uno de estos conjuntos es el número tres expresado por el último numeral del conjunto estándar {“1”, “2”, “3”}.

Si un conjunto estándar A es un subconjunto propio de un conjunto estándar B, entonces puede decirse que el número cardinal de A es menor que el número cardinal de B.

Por ejemplo, {“1”, “2”} ⊂ {“1”, “2”, “3”, “4”, “5”}. Por tanto $2 < 5$ (léase dos menor que cinco). El número cero, que es el número cardinal de un conjunto vacío, es el menor número cardinal.

Los elementos del conjunto $\{3, 0, 1, 5\}$ pueden ser ordenados $0 < 1 < 3 < 5$ observando que { } ⊂ {“1”} ⊂ {“1”, “2”, “3”} ⊂ {“1”, “2”, “3”, “4”, “5”}. De este modo, tenemos un orden para el conjunto de números cardinales —o de números enteros, como llamaremos a dicho conjunto en este cuaderno. Cuando los números enteros están escritos en el orden

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots,$$

cada cual es menor que el número que le sucede en la secuencia; de este modo $1 < 4$, $0 < 3$, $5 < 6$, y así sucesivamente. La relación $1 < 4$ puede también escribirse de manera equivalente $4 > 1$, lo cual se lee “cuatro es mayor que uno”.

Si a es cualquier número entero, y asimismo b es cualquier número entero, entonces una y sólo una de las expresiones siguientes es cierta:

1. $a = b$ (a igual que b)
2. $a < b$ (a menor que b)
3. $b < a$ (b menor que a).

Éste es el llamado *principio de tricotomía.*

El eje numérico da una manera concreta de apreciar el orden en el conjunto de los números enteros. Un conjunto de puntos equidistantes en la recta suministra la representación geométrica para los números enteros. Se escoge un punto arbitrario al cual se le hace corresponder el cero y se marca "0" como se muestra en la figura 1. Los puntos a la derecha de 0 se marcan 1, 2, 3, . . ., y así sucesivamente; de este modo tenemos un apareamiento de números enteros con puntos equidistantes, como se muestra en la figura 2

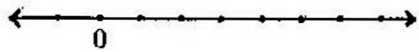


FIGURA 1

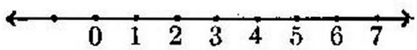


FIGURA 2

Cada punto es la *gráfica* del número entero con el que se aparea y cada número entero es la *coordenada* del punto con el que se aparea.

Un examen del eje numérico aclara los siguientes puntos:

1. A cada número entero le corresponde un punto, y sólo uno, del eje numérico.
2. Un número entero a es menor que un número entero b, si el punto correspondiente al número a se halla a la izquierda del punto correspondiente a b; a es mayor que b si el punto correspondiente a a está a la derecha del punto correspondiente a b.
3. No hay un número entero máximo; la secuencia de puntos escogidos para corresponder a los números enteros continúa indefinidamente hacia la derecha.

OPERACIONES CON EL CONJUNTO DE NUMEROS ENTEROS

La máquina representada en la figura 3, puede ilustrar las operaciones con el conjunto de números enteros. La máquina opera con sólo dos números a la vez, por tanto a la operación se le llama *binaria*. (El prefijo "bi" denota dos como en *bíceps* y en *bicicleta*.)

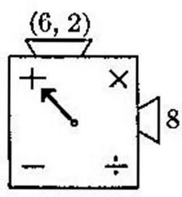


FIGURA 3

Escojamos dos números enteros, por ejemplo 6 y 2. Si metemos el 6 y el 2 dentro de la máquina y apuntamos la flecha en dirección del signo +, el signo de la suma, la operación dará como resultado 8. Análogamente, si metemos los mismos números enteros 6 y 2 dentro de la máquina y apuntamos en dirección de signo —, símbolo de la resta, el resultado será 4. El mismo par de números multiplicados darán 12 como resultado, y la división sólo 3.

Una operación en matemáticas es similar al funcionamiento de esta máquina. *Es la manera de asociar un par ordenado de números con un tercero especificado.*

> *Un par ordenado de números* (a, b) *es aquel en que el orden considerado de los números es tal que primero es* a *y después* b. *El número expresado primero se conoce como primera componente, y el número expresado en segundo término se llama segunda componente del par ordenado.*

Cuando ejecutamos la operación de sumar, asociamos el número 8 con el par ordenado de números enteros (6, 2), y si ejecutamos la multiplicación con este mismo par el resultado es 12.

La resta y la división, operaciones también aritméticas, añadidas a las anteriores forman las llamadas *cuatro operaciones básicas o fundamentales de la aritmética.*

La suma y la multiplicación, llamadas *operaciones directas,* son las opuestas respectivamente a la resta y la división, y se designan *operaciones inversas.*

Se justifican, pues, estos términos: debido a que la resta es la operación inversa de la suma, y la división es la inversa de la multiplicación. Las operaciones inversas serán tratadas en otra sección de este cuaderno.

PAR ORDENADO DE NÚMEROS	OPERACIÓN	RESULTADO
(25, 4)	adición	29
(17, 6)	sustracción	11
(55, 3)	multiplicación	165
(27, 9)	división	3
(6, 7)	adición	13
(75, 25)	división	3
(16, 9)	sustracción	7
(8, 4)	multiplicación	32

Grupo de ejercicios 1

1. Llene los espacios de las listas siguientes:

	PAR ORDENADO	RESULTADO	OPERACIÓN EMPLEADA
a)	(5, 7)	12	______
b)	(10, 12)	______	adición
c)	(5, __)	9	adición
d)	(__, 9)	7	sustracción
e)	(10, 2)	8	______
f)	(3, __)	1	sustracción
g)	(5, 2)	10	______
h)	(3, 6)	______	multiplicación
i)	(8, __)	24	multiplicación
j)	(12, 2)	______	división
k)	(25, 5)	______	división
l)	(36, __)	9	división

2. En cada diagrama de la figura 4, ¿hacia qué símbolo debe estar dirigida la flecha?

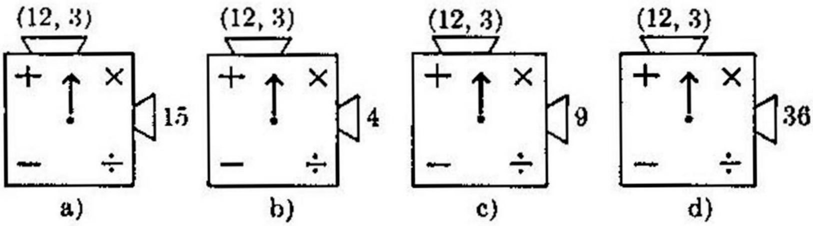


Figura 4

3. Escriba el numeral que representa el resultado de las operaciones indicadas en cada diagrama de la figura 5.

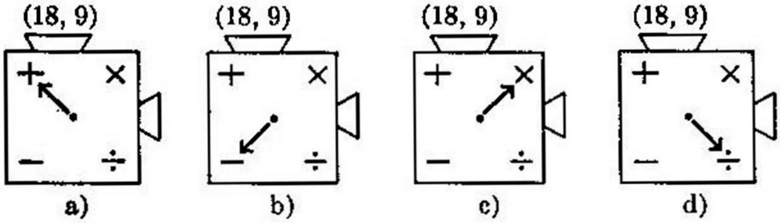


Figura 5

4. ¿Cuáles de las siguientes operaciones tienen resultado que no sea número entero?

a) 4×6	*f)* $5 \div 2$
b) $3 + 8$	*g)* $36 \div 9$
c) $3 - 7$	*h)* $4 - 4$
d) 0×5	*i)* $4 \div 8$
e) $11 - 7$	*j)* $0 + 0$

ADICION

Puesto que el número es una propiedad resultante de un conjunto de objetos, es natural volver a la idea de conjunto * para definir la suma de enteros. Consideremos un par de conjuntos no vacíos, que no tengan miembros en común. Tales conjuntos son llamados *conjuntos disjuntos.*

Hay formas tipo para hacer nuevos conjuntos a partir de dicho par de conjuntos. Por ejemplo, si tenemos un conjunto de muñecos en una sala de exhibición, y a la vez un conjunto de muñecas en la misma, podemos unir estos dos conjuntos para obtener el conjunto de muñecos en la sala de exhibición (ver figura 6). Si X es el conjunto de muñecos y Y el conjunto de muñecas, unimos los dos conjuntos para obtener uno nuevo, consistente en muñecas y muñecos; llamamos a este nuevo conjunto la unión de X y Y, y lo denotamos por el símbolo $\cup$. Entonces $X \cup Y$ se lee: "la unión de X y Y". Lo cual significa que el conjunto fue obtenido cuando unimos el conjunto X y el conjunto Y para formar un nuevo conjunto. El conjunto $X \cup Y$ contiene a cada miembro perteneciente a X y a cada miembro perteneciente a Y.

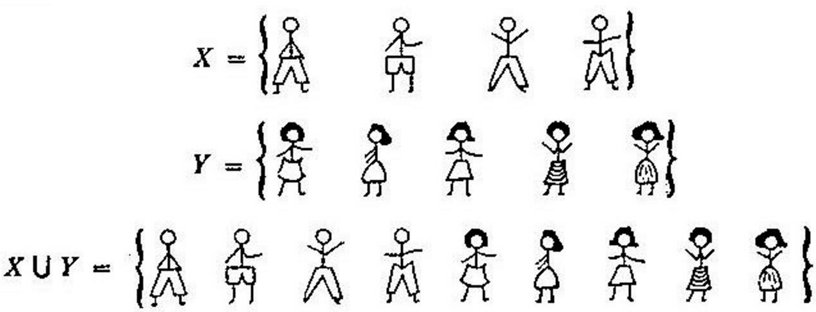
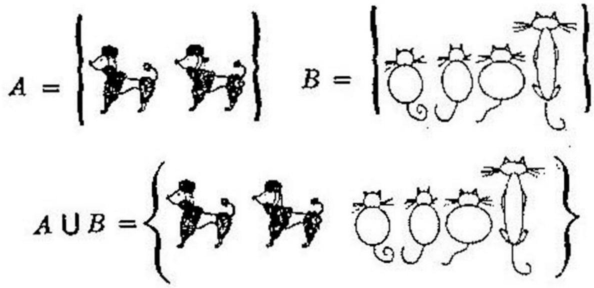


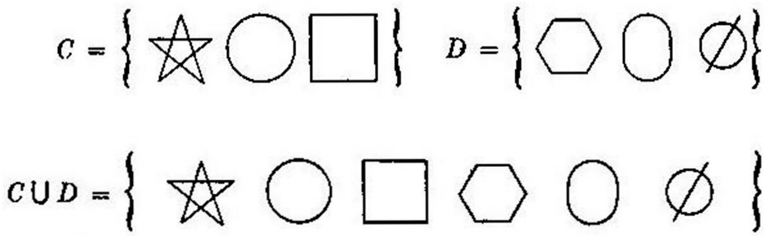
FIGURA 6

* Para una discusión de conjuntos, véase el cuaderno 1 de esta serie.

EJEMPLO 1



EJEMPLO 2



EJEMPLO 3

$$E = \{1, 2, 3\} \qquad F = \{4, 6, 8\}$$

$$E \cup F = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

La unión de conjuntos *disjuntos* se emplea como base para el concepto de la suma de números enteros. Hay varios hechos básicos acerca de la unión de conjuntos íntimamente relacionados con la operación de la suma. Si el conjunto B se une con el conjunto A el resultado será el mismo que si hubiéramos unido A con B. Por ejemplo, A y B son los conjuntos que aparecen en la figura 7.

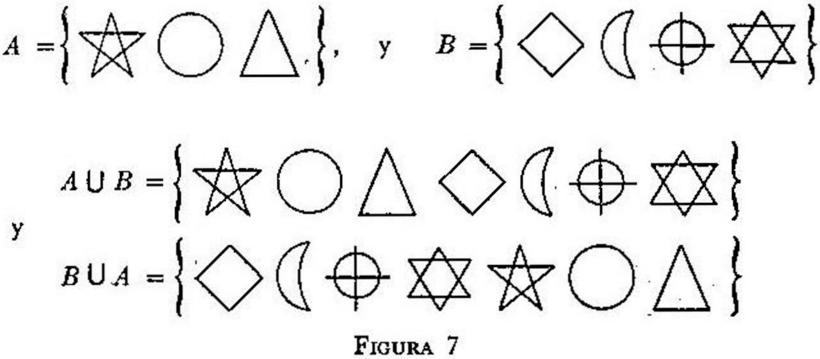


FIGURA 7

Nótese que los elementos en $A \cup B$ son exactamente los mismos que en $B \cup A$. En consecuencia, $A \cup B = B \cup A$ (véase el cuaderno 1, *Conjuntos*).

Si deseamos encontrar la unión de tres conjuntos, podremos unir sólo dos conjuntos a la vez. Por ejemplo, para encontrar la unión de los conjuntos A, B y C (figura 8), podemos unir B y A para obtener $A \cup B$ y entonces unir C y $A \cup B$; o podemos unir C y B para obtener $B \cup C$ y luego unir este conjunto con A. En ambos casos el conjunto resultante será el mismo.

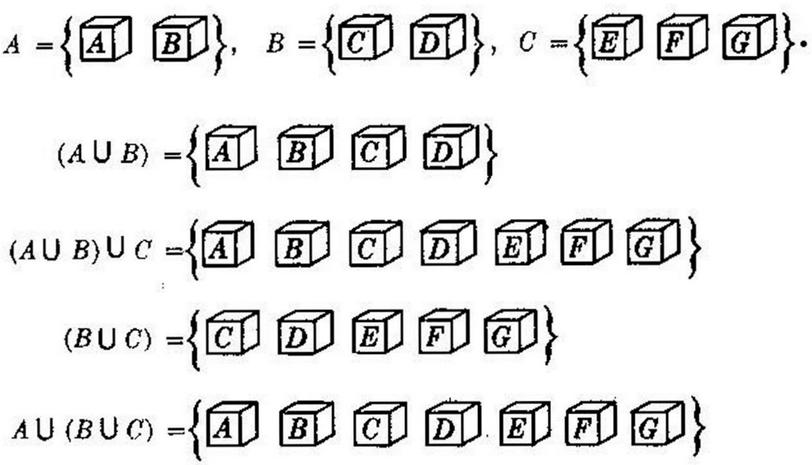


FIGURA 8

El paréntesis en las expresiones $(A \cup B) \cup C$ y $A \cup (B \cup C)$ significa que los conjuntos indicados dentro del paréntesis se unen primero y el conjunto resultante se une al tercer conjunto. Entonces $(A \cup B) \cup C$ significa que B se une a A para formar $A \cup B$. Y este conjunto se une a C. De igual modo, $A \cup (B \cup C)$, significa que C se une a B para formar $B \cup C$ y este conjunto se une a A. En ambos casos el conjunto resultante es el mismo. En general,

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Podemos también formar la unión de dos conjuntos, uno de los cuales es el *conjunto vacío*, que es un conjunto sin miembros. Por ejemplo, dado A, el conjunto de libros en un estante, y B que representa el conjunto de libros en un segundo estante que no contiene libros, por ejemplo:

$A = \{$ □□□□□□ $\}$, $B = \{\ \}$,

$A \cup B = \{$ □□□□□□ $\}$.

En general si B es el conjunto vacío

$$A \cup B = A.$$

Emplearemos la idea de la unión de dos conjuntos disjuntos para definir la operación de suma de números enteros. La suma es esencialmente una operación con un par ordenado de números. Dados dos números tales como 4 y 3, está asociado con ellos un tercer número que es "7", llamado suma de esos dos números. La pregunta es: ¿qué operación sugiere que el resultado sea 7? Considerando los dos conjuntos disjuntos:

$$A = \{\text{estrella, pelota, cuadrado, diamante}\}$$

$$B = \{\text{plato, cometa, triángulo}\}.$$

El número cardinal asociado con A es 4, y el número cardinal asociado a B es 3. La unión de A y B es

$$A \cup B = \{\text{estrella, pelota, cuadrado, diamante, plato, cometa, triángulo}\}.$$

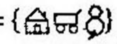
El número cardinal asociado a $A \cup B$ es 7; por consiguiente, definimos la suma de 4 y 3 como 7.

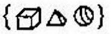
$C = \{△□\}$
El número cardinal de C es 2.

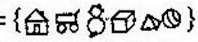
$D = \{◇○▯\}$
El número cardinal de D es 3.

$C \cup D = \{△□◇○▯\}$
El número cardinal de $C \cup D$ es 5.

La suma de 2 y 3 es 5.

$E =$ {}
El número cardinal de E es 3.

$F =$ {}
El número cardinal de F es 3.

$E \cup F =$ {}
El número cardinal de $E \cup F$ es 6.

La suma de 3 y 3 es 6.

La suma de los números cardinales de dos conjuntos disjuntos se define como el número cardinal de la unión de los dos conjuntos.

Recuerde que podemos obtener la unión de dos conjuntos que no sean disjuntos (esto es, dos conjuntos que tengan por lo menos un elemento común). Por ejemplo, dados

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\},$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

entonces

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}.$$

Nótese que no repetimos el nombre de miembros comunes en la unión de dos conjuntos. En este caso, la suma de los números cardinales de A y B *no* es el número cardinal de $A \cup B$, porque A y B no son disjuntos.

Cuando consideramos dos conjuntos disjuntos y obtenemos su unión, estamos operando con los conjuntos. Cuando consideramos dos números y obtenemos el tercero, estamos operando con números. La suma de dos números enteros es, entonces, una operación binaria con los números cardinales asociados a dos conjuntos disjuntos. Nótese que la suma es una operación con números que representan la cardinalidad de dos conjuntos y no una operación con los conjuntos mismos.

Hay nombres especiales para los números con los que se opera en la suma, se les llama *sumandos* y al resultado de una operación de suma o adición se le llama *suma*. Como sabemos, el símbolo de la suma es $+$. Por tanto, en esta proposición

$$16 + 12 = 28,$$

16 y 12 son los sumandos y 28 la suma. La proposición se lee:

Dieciséis más doce igual a veintiocho.

También puede leerse:

La suma de doce y dieciséis es veintiocho.

Grupo de ejercicios 2

1. Si tenemos $A = \{\text{perro, gato, vaca, puerco}\}$,
   $B = \{\text{pato, caballo, elefante}\}$.

   a) ¿Cuáles son los miembros de $A \cup B$?
   b) ¿Cuáles son los números cardinales de A, B y $A \cup B$?

2. Si tenemos $R = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$,
   $S = \{1, 3, 5, 7\}$.

   a) ¿Cuáles son los miembros de $R \cup S$?
   b) ¿Cuáles son los números cardinales de R, de S y de $R \cup S$?

3. Si W es el conjunto de todos los caballos blancos, y L el conjunto de todos los caballos violeta, ¿cuáles son los miembros de $W \cup L$?

4. Si $F = \{\text{perro, vaca, caballo, puerco, pavo}\}$,
   $G = \{\text{gallina, perro, petirrojo, gato, puerco}\}$.

a) El número de miembros de F es ______________

b) El número de miembros de G es ______________

c) Dé una lista de los miembros de $F \cup G$ ______________

d) El número de miembros de $F \cup G$ es ______________

e) ¿Por qué la suma del número de miembros en F y el número de miembros en G no es igual al número miembros en $F \cup G$?

5. Si $M = \{a, b, c, d, e, f, g\}$,

   $N = \{h, i, j, k\}$.

   a) ¿Cuál es el número de miembros de $M \cup N$?

   b) ¿Cómo encontró la respuesta?

   c) ¿Cómo pudo encontrar la respuesta de esa manera?

6. Si $X = \{\bigcirc\square\triangle\bigcirc\}$,

   $Y = \{\ \}$.

   ¿Cuál es el número de elementos de X, de Y y de $X \cup Y$?

7. Si $A =$ {sombrero, abrigo, bolsa}, y suponiendo que

   $A \cup B =$ {sombrero, abrigo, bolsa, guantes}.

   Si A y B son conjuntos disjuntos, ¿cuáles son los miembros de B?

8. Complete el cuadro I.

CUADRO I

Sumando		*Sumando*	*Proposición numérica*	*Suma*
a)	5	4	$5 + 4 = n$	9
b)	9	6		
c)	7	3		
d)	2	8		

MULTIPLICACION

La multiplicación es una operación que asocia a cada par ordenado de números enteros tales como (4, 5), otro número entero, en este caso 20.

A los números 4 y 5 se les llama *factores* de 20, y 20 es llamado *producto* de los factores 4 y 5. ¿Cómo se determina el producto? Puesto que los números enteros fueron definidos en términos de conjuntos, volvemos a la idea de una operación con los conjuntos para ver cómo puede definirse el producto de dos números enteros.

La multiplicación puede tratarse mediante el *producto cartesiano* * de dos conjuntos A y B. Este producto se obtiene apareando cada elemento de A con cada elemento de B. Si A es el conjunto de tazas roja, amarilla, azul, verde, y B el conjunto de platillos rojo, amarillo, azul, verde y blanco, entonces pueden aparearse como se muestra en la figura 9.

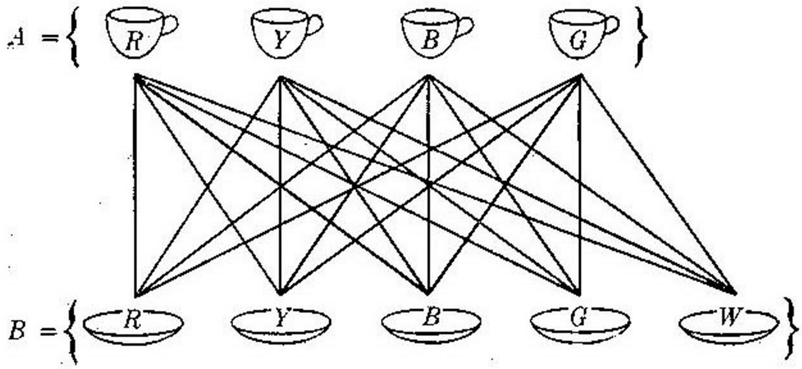
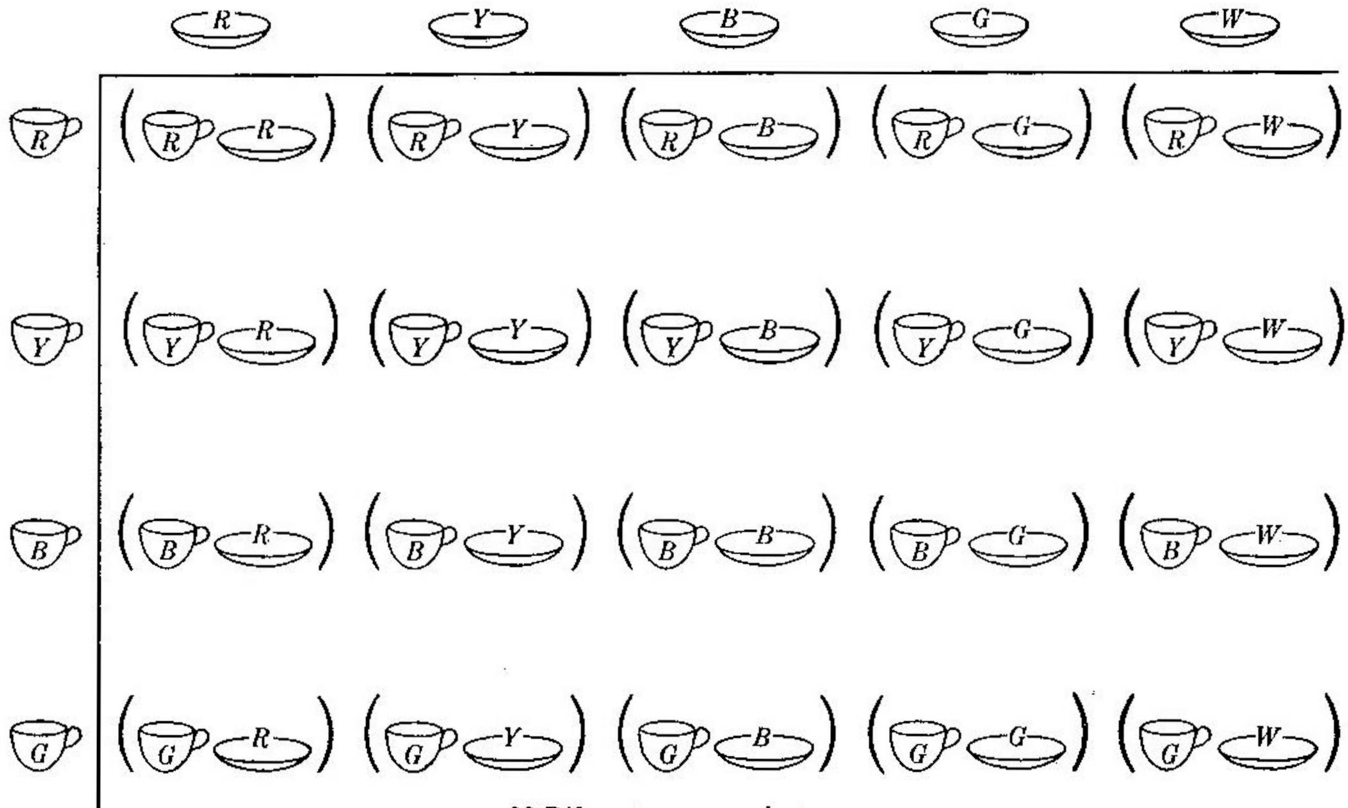


FIGURA 9

El conjunto de todos los pares ordenados obtenidos apareando cada elemento de A con cada elemento de B, se llama producto cartesiano de los conjuntos A y B. El producto de los números cardinales de A y B se define como el número cardinal del producto cartesiano de los conjuntos A y B.

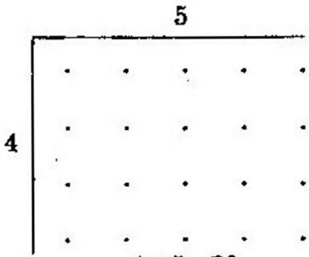
A la distribución ordenada de estos apareamientos en renglones y columnas se le llama *arreglo*. La figura 10 representa un arreglo. Este arreglo muestra todos los pares formados mediante apareamiento de cada miembro de un conjunto de cuatro tazas (A) con cada miembro de un conjunto de cinco platillos (B). Hay 20 diferentes combinaciones o pares.

* Véase cuaderno 1: *Conjuntos.*



20 Diferentes apareamientos.

Figura 10



$4 \times 5 = 20$

FIGURA 11

En la figura 11 hay cuatro renglones y cinco columnas, en el arreglo; cada apareamiento se representa por un punto. El producto que se escribe 4×5, y se lee "cuatro veces cinco" se define como el número de apareamientos en el arreglo. Por tanto, dados dos conjuntos el producto de los números cardinales de los conjuntos puede encontrarse contando las combinaciones posibles entre los miembros de los conjuntos. Algunas propiedades importantes de la multiplicación resultan evidentes. Notamos en las figuras 10 y 11, que un arreglo 4 por 5 es la unión de 4 conjuntos disjuntos (renglones) cada uno compuesto de 5 miembros. En consecuencia, 4×5 puede obtenerse también de la siguiente manera: $5 + 5 + 5 + 5$. Esta forma de obtener el producto se define a veces como *suma repetida.* Definir la multiplicación como una suma repetida es, quizá, más familiar que la descripción mediante el producto cartesiano. Ciertamente el arreglo es la unión de cinco

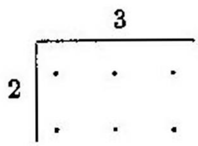
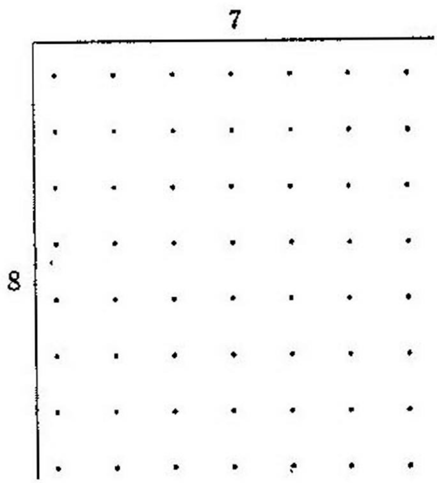
PAR ORDENADO	ARREGLO	PRODUCTO
(2, 3)		6
(8, 7)		56

FIGURA 12

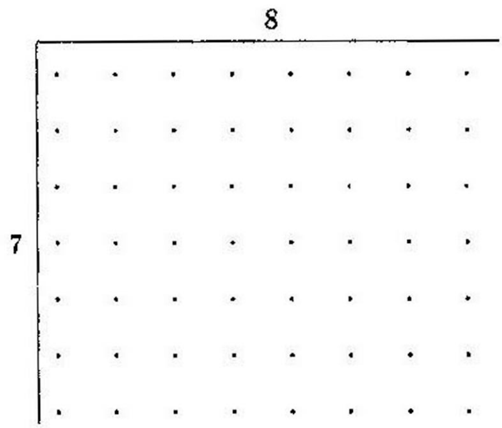
PAR ORDENADO	ARREGLO	PRODUCTO
(7, 8)		56

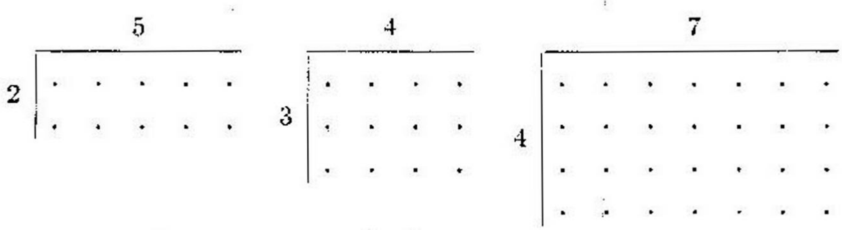
FIGURA 12 (Continuación)

conjuntos disjuntos (columnas), cada uno de los cuales tiene cuatro miembros. Por tanto, 4×5 puede ser obtenido de la siguiente manera $4 + 4 + 4 + 4 + 4$.

Ejemplos de otros arreglos se muestran en las figuras 12 y 13.

Nótese que el número de renglones está escrito primero y el número de columnas después; por ejemplo, en la figura 12 el producto 2×3 se representa por un arreglo de 2 renglones y 3 columnas.

En general, si a y b son números enteros, el producto $a \times b$ se representa por un arreglo con a renglones, y b columnas.



2×5 $\qquad$ 3×4 $\qquad$ 4×7

FIGURA 13

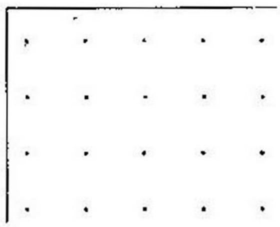
Grupo de ejercicios 3

1. Dibuje arreglos para ilustrar el producto de cada uno de los siguientes pares ordenados.

a) (4, 2) *c)* (5, 1)
b) (3, 9) *d)* (6, 4)

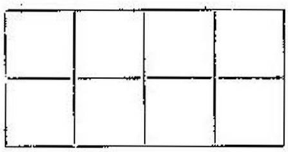
2. Escriba las proposiciones numéricas (tal como $3 \times 5 = 15$) que describan cada uno de los siguientes arreglos.

a)

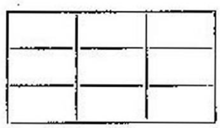


c)

b)



d)



3. Dibuje los arreglos para ilustrar cada una de las siguientes proposiciones:

a) 5×7 *c)* 2×4
b) 4×2 *d)* 3×6

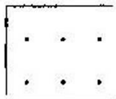
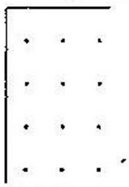
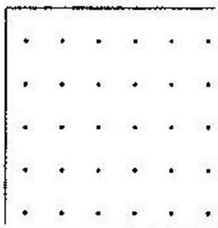
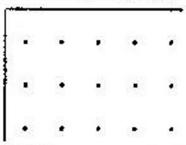
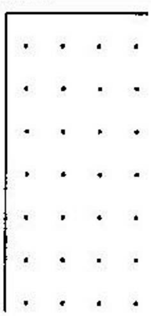
4. El señor Márquez va a comprar un coche de dos tonos. La compañía le ofrece capotas de seis colores y carrocerías de ocho. Dibuje un arreglo que muestre el número posible de combinaciones de colores.

5. Ruth tiene cinco blusas y seis faldas. Suponiendo que cada blusa pueda usarse con cada falda, ¿cuántas combinaciones puede hacer Ruth?

6. Una nevería ofrece 31 sabores de helados y anuncia conos dobles. ¿Cuántas combinaciones de sabores diferentes hay (incluyendo los casos en que, en el cono doble, se repita el mismo sabor) entre las que pueda escogerse, cuando se pida un cono doble?

7. Llene los espacios del cuadro II.

CUADRO II

Arreglo	*Primer factor*	*Segundo factor*	*Producto*
a 	2	3	6
b 			
c 			
d 			
e 			

8. Llene los espacios del cuadro III.

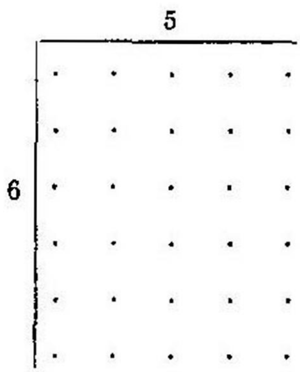
CUADRO III

	Arreglo		*Proposición numérica*
	Renglones	*Columnas*	
a)	2	6	$2 \times 6 = 12$
b)	7	4	$7 \times 4 = \_\_$
c)	3	7	$\_\_ \times 7 = 21$
d)	4	6	$4 \times \_\_ = 24$
e)	8	3	$\_\_ \times \_\_ = \_\_$
f)	$\_\_$	4	$\_\_ \times \_\_ = 24$
g)	9	$\_\_$	$45 = 9 \times \_\_$
h)	5	n	$\_\_ \times n = 30$
i)	p	3	$p \times \_\_ = 30$

9. Dibuje óvalos alrededor de los subconjuntos para mostrar lo siguiente:

a) $6 \times 5 = 30$

b) $5 \times 6 = 30$



PROPIEDADES DE ADICION

Propiedad de cerradura

La suma ha sido definida como una *operación mediante un par ordenado de números, llamados sumandos, de donde resulta un tercer número* *específico*, llamado *suma*. Los sumandos pueden considerarse como los números cardinales de dos conjuntos disjuntos; la suma de estos números se define como *el número cardinal de la unión de dos conjuntos disjuntos.*

La suma se obtiene con sólo dos números; consecuentemente, es una operación binaria.

Si sumamos las componentes de los pares ordenados de números enteros que siguen, hay en cada caso un elemento del conjunto de los números enteros, que es su suma:

(4, 5)	$4+5=9$
(53, 86)	$53+86=139$
(269, 406)	$269+406=675$
(1 357, 2 468)	$1\,357+2\,468=3\,825$

¿Puede descubrirse algún par ordenado de números enteros, cuya suma no sea otro número entero? No hay tal par, porque la operación de sumar puede ser ejecutada con cualquier par ordenado de números enteros para obtener otro número entero. En lenguaje matemático decimos: *el conjunto de números enteros es cerrado respecto a la operación de suma.* Esta propiedad de la suma de enteros es llamada *propiedad de cerradura.*

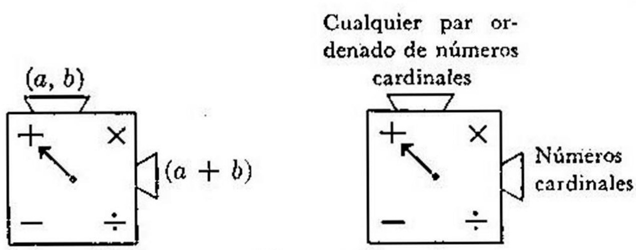


FIGURA 14

Propiedad conmutativa

Revisemos el concepto de unión de dos conjuntos disjuntos para ver si el orden en el cual se unen afecta el resultado (figura 15). ¿Es $A \cup B = B \cup A$? $A \cup B$ y $B \cup A$ son exactamente el mismo conjunto. En consecuencia, el número cardinal de $A \cup B$ es igual al número cardinal de $B \cup A$ (en este caso, 8).

Consideremos algunos ejemplos no numéricos para descubrir si el orden en el cual se efectúan algunas combinaciones, afecta el resultado. ¿Afectaría al resultado el orden en el que agregamos azúcar y crema al café; o cuando combinamos azul y amarillo para obtener pintura verde?

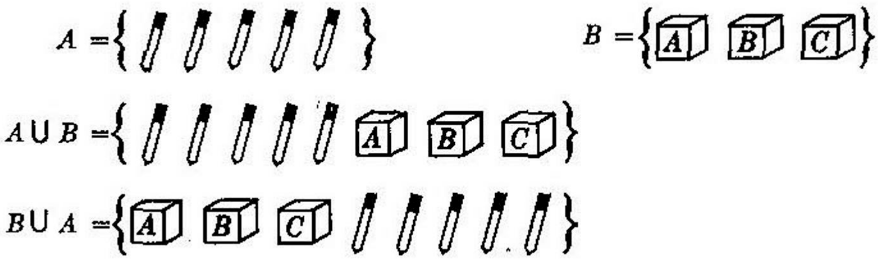


FIGURA 15

En cada uno de los siguientes pares de sumas ¿el resultado es el mismo?

a) $7+6, 6+7$,
b) $50+46, 46+50$,
c) $14+32, 32+14$.

La propiedad de la suma de números enteros, que se ilustró previamente en el ejemplo, se llama *propiedad conmutativa de la suma.* Esta propiedad dice que el orden de los sumandos puede ser cambiado sin alterarse el resultado; esto es, $7+2=2+7$; o en general, si a y b son números enteros cualesquiera, entonces $a+b=b+a$.

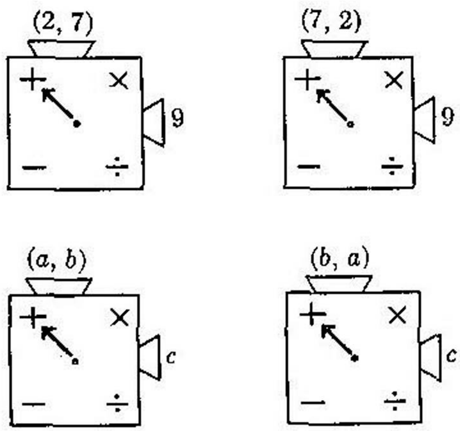


FIGURA 16

Propiedad asociativa

Se ha destacado que la suma es una operación binaria. Una operación binaria es aquella que puede ser ejecutada con sólo dos números.

¿Cómo puede obtenerse la suma de tres números, por ejemplo, 2, 3 y 4? Debemos operar sólo con dos números a un tiempo; podemos sumar 2 y 3 primero, para obtener 5. A esta suma, 5, le agregamos 4 para obtener 9. Escribimos:

$$\begin{aligned}(2+3)+4&=5+4\\&=9\end{aligned}$$

Por otra parte, podemos sumar $3+4$ para obtener 7, y entonces sumar 2 y 7 para obtener 9. Escribimos:

$$\begin{aligned}2+(3+4)&=2+7\\&=9\end{aligned}$$

En cada caso la suma es 9, esto es:

$$(2+3)+4=2+(3+4).$$

Estudie las siguientes proposiciones. ¿Son todas ciertas? Verifique *b)* y *c)*.

a) $(4+5)+2=4+(5+2)$,

$$\begin{aligned}(4+5)+2&=9+2,\\&=11,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}4+(5+2)&=4+7,\\&=11;\end{aligned}$$

entonces

$(4+5)+2=4+(5+2)$ es cierta esta proposición.

b) $(8+1)+6=8+(1+6)$

c) $(7+5)+9=7+(5+9)$

En general, si a, b y c son cualesquiera números enteros, entonces:

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

A esta propiedad de agrupación se le llama *propiedad asociativa de la suma.*

Puesto que

$$(2+3)+4=2+(3+4)$$

y

$$(6+7)+9=6+(7+9)$$

y en general

$$(a+b)+c=a+(b+c),$$

no es necesario usar el paréntesis al escribir la suma de tres números. Podemos escribir ahora $(2+3)+4$, simplemente

$$2+3+4.$$

La propiedad asociativa puede ser generalizada para agrupar más de tres números; entonces, podemos escribir:

$$2+3+4+5+6,$$

en vez de

$$\{[(2+3)+4]+5\}+6.$$

Elemento idéntico

Hay un número entero que desempeña un papel muy especial respecto a la suma: el cero. La propiedad especial del cero proviene de la unión de dos conjuntos al menos uno de los cuales es vacío.

Dados

$$A=\{x, w, t\} \qquad \text{y} \qquad B=\{\ \},$$

entonces

$$A \cup B=\{x, w, t\}.$$

Recuerde que el número cardinal de B es 0. Por tanto:

$$3+0=3,$$
$$16+0=16,$$
$$0+43=43,$$
$$0+0=0.$$

Puesto que la suma del cero y otro número entero es el mismo número entero, el cero es llamado el *elemento idéntico* para la suma.

Grupo de ejercicios 4

1. ¿Cuáles de las siguientes acciones son conmutativas?

a) Cruzar la puerta y abrirla.
b) Ponerse el abrigo y el sombrero.
c) Ponerse los zapatos y los calcetines.

d) Ponerse el traje de baño y meterse en la alberca.
e) Cocinar la comida y comérsela.
f) Lavarse la cara y maquillarse.
g) Pagar la cuenta de luz y la del gas.

2. La operación de mezclar tres colores diferentes de pintura para producir un nuevo color ¿es una operación asociativa?

3. ¿Cuál de los siguientes conjuntos es cerrado con respecto a la adición?

a) $\{2, 3, 6, 8, 10\}$, *c)* $\{0\}$,
b) $\{0, 1\}$ *d)* $\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$

4. ¿Cuál es el elemento idéntico para la suma en el conjunto de los números enteros?

5. Demuestre que las siguientes proposiciones son ciertas:

a) $6+(7+8)=(6+7)+8$
b) $(9+10)+2=9+(10+2)$
c) $(7+3)+5=7+(3+5)$
d) $14+(6+9)=(14+6)+9$

Cuadro IV

Proposición numérica	*Nombre de la propiedad de la suma empleada*
a) $7+0=\_\_$	
b) $2+4=4+\_\_$	
c) $5+(2+3)=(5+2)+\_\_$	
d) $(0+3)+10=\_\_+10$	
e) $3+\_\_=5+3$	
f) $0+\_\_=0$	
g) $(17+7)+n=17+(7+\_\_)$	
h) $a+b=\_\_+a$	

6. Diga cuál es la propiedad ilustrada en cada una de las siguientes proposiciones:
   a) $7+13=13+7$
   b) $9+0=9$
   c) $(3+4)+6=3+(4+6)$

7. Complete el cuadro IV, inserto en la página 32.

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACION

La operación que se practica con dos números llamados *factores* es la multiplicación y tiene como propósito encontrar un tercer número específico llamado *producto.* Esta operación es binaria, puesto que multiplicamos sólo dos números.

El producto de un par ordenado de números enteros se ha definido como el número de apareamientos en el producto cartesiano de los dos conjuntos.

Cualquier disposición ordenada en renglones y columnas de los apareamientos de los elementos en un producto cartesiano se conoce con el término de *arreglo.* Algunos ejemplos de arreglos se muestran en la figura 17.

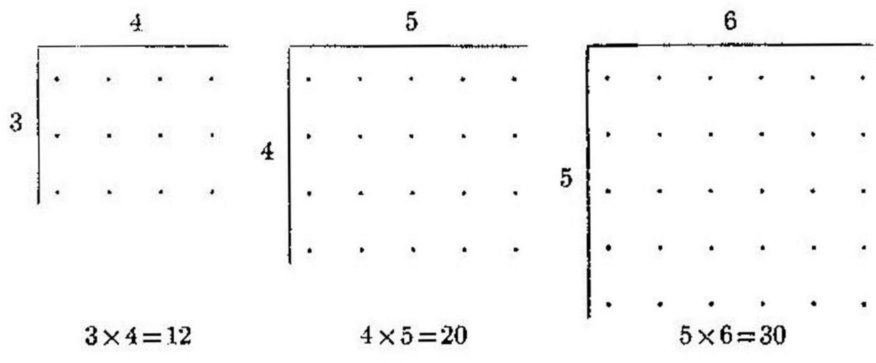


FIGURA 17

La representación de un producto por medio de un arreglo permite computarlo mediante la cuenta o la suma de pares y facilita la comprensión de las propiedades importantes de la multiplicación.

Observemos primero que un arreglo 3×4 es la unión de 3 conjuntos disjuntos (renglones), cada uno de los cuales tiene cuatro elementos. Por consiguiente, el producto de 3×4 puede obtenerse sumando $4+4+4$ (figura 18). Este es el método conocido de multiplicación en que se repite siempre el mismo sumando.

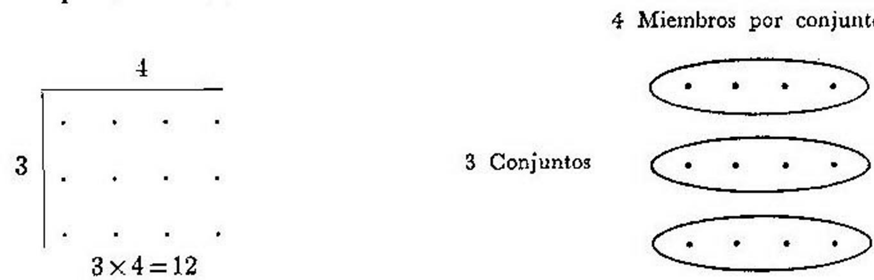


FIGURA 18

También es cierto que el arreglo (figura 18) es la unión de cuatro conjuntos disjuntos (columnas), cada uno de los cuales tiene tres miembros; entonces 3×4 puede computarse también mediante la suma repetida

$$3+3+3+3=12.$$

Propiedad de cerradura

El producto de cada par de números enteros es un número entero. Si seleccionamos cualquier par de números del conjunto de números enteros su producto será un número entero.

Esta propiedad de la multiplicación se describe diciendo que el conjunto de los números enteros es *cerrado* respecto a la operación de multiplicación, y es la llamada *propiedad de cerradura* de la multiplicación.

Propiedad conmutativa

El estudio de varios arreglos revela otra propiedad del conjunto de números enteros y de la operación de multiplicación. Consideremos las ilustraciones de la figura 19. Nótese que $2 \times 5 = 5 \times 2$ y $3 \times 4 = 4 \times 3$.

En general, como estos ejemplos sugieren: si a y b son números enteros cualesquiera, entonces $a \times b = b \times a$. Esta es la llamada *propiedad conmutativa* de la multiplicación. Un arreglo 2×5, puede cambiarse a otro, 5×2, girándolo simplemente 90°. En general, un arreglo $a \times b$ puede ser cambiado a un arreglo $b \times a$ girándolo 90°.

En otras palabras, conmutando el orden de los factores [cambiando (3×7) a (7×3)] no se altera el producto.

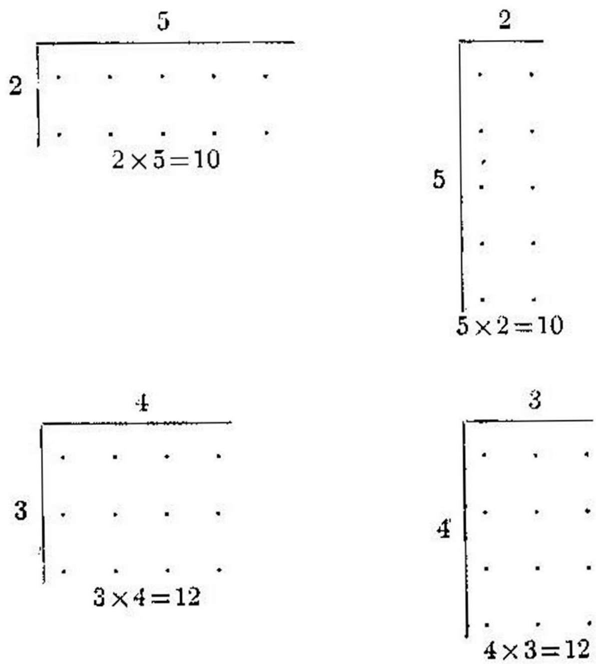


FIGURA 19

Propiedad asociativa

Recordemos que la multiplicación es una operación binaria, esto es, una operación con dos números. Para encontrar el producto de tres números, por ejemplo 2, 3 y 4, podemos multiplicar 2 y 3, y obtener el producto 6, y después multiplicar 6×4. Escribimos esto:

$$\begin{aligned}(2\times3)\times4 &= 6\times4\\ &= 24.\end{aligned}$$

O podemos multiplicar 3×4 para obtener 12, y después multiplicar 2×12:

$$\begin{aligned}2\times(3\times4) &= 2\times12\\ &= 24.\end{aligned}$$

En ambos casos el producto es el mismo. Por tanto:

$$(2\times3)\times4=2\times(3\times4).$$

Estudie los tres ejemplos siguientes. ¿Son todas las proposiciones ciertas?

$$(3\times5)\times4=\times3(5\times4)$$
$$(2\times6)\times7=2\times(6\times7)$$
$$(5\times8)\times9=5\times(8\times9)$$

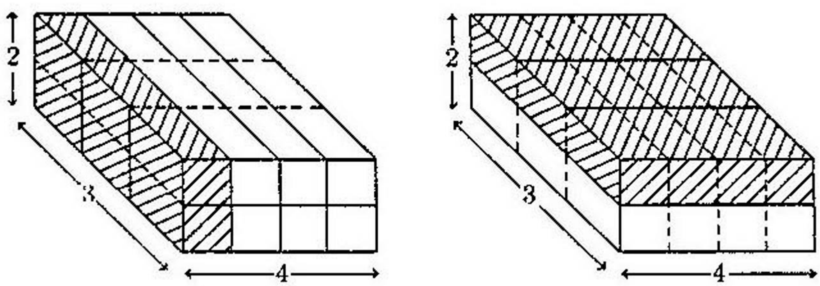
En general, si a, b y c son cualesquiera números enteros,

$$(a\times b)\times c=a\times(b\times c).$$

Esta propiedad se llama *propiedad asociativa de la multiplicación.*

Podemos ilustrar la asociatividad de la multiplicación considerando una caja que está hecha de bloques (figura 20), dadas las dimensiones de esa caja que son 2 por 3 por 4, el número de bloques en la caja es $(2\times3)\times4$, y también $2\times(3\times4)$, indicando que es cierto que

$$(2\times3)\times4=2\times(3\times4).$$



2×3 Bloques en cada columna
4 columnas

3×4 Bloques en cada línea
2 líneas

FIGURA 20

En general, estas partes pueden hacerse con una caja cuyas dimensiones son a por b por c, donde a, b y c son tres números finitos.
Puesto que

$$(2\times3)\times4=2\times(3\times4),$$

y

$$(6\times7)\times8=6\times(7\times8)$$

o, en general,

$$(a\times b)\times c=a\times(b\times c),$$

no es necesario usar paréntesis al escribir el producto de tres factores. Podemos escribir $(2\times3)\times4$ o simplemente así $2\times3\times4$.

La propiedad asociativa puede ser generalizada para agrupar más de tres factores. Por ejemplo podemos escribir

$$5\times6\times7\times8\times9,$$

en vez de

$$\{[(5\times6)\times7]\times8\}\times9.$$

Elemento idéntico

El número 1 desempeña el mismo oficio respecto de la multiplicación, que el 0 respecto de la suma. Recuerde que

$$0+1=1,$$
$$0+2=2,$$

y, en general, si n es cualquier número entero,

$$0+n=n.$$

Llamamos al 0 *elemento idéntico* de la suma.

De manera semejante, ¿hay un elemento idéntico para la multiplicación? Examinemos los arreglos de la figura 21.

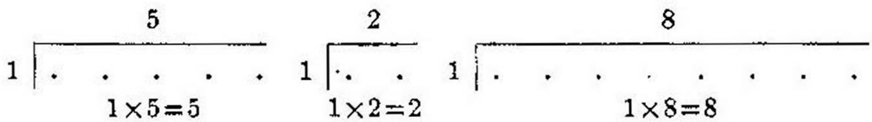


FIGURA 21

Un arreglo de $1\times n$ consiste de un renglón con n elementos, de aquí que el arreglo tiene exactamente n elementos. Entonces, si n es cualquier número entero $1\times n=n$, y por la propiedad conmutativa $n\times1=1\times n=n$. Por esta razón el número 1 es llamado el *elemento idéntico para la multiplicación.*

El oficio del cero en la multiplicación

El número 0 tiene una propiedad especial con respecto a la multiplicación. El número de miembros es un arreglo de 5 por 0 que tiene 5 renglones con 0 (sin) miembros es claramente 0, porque el arreglo es el conjunto vacío. De aquí que

$$5\times0=0.$$

Porque la propiedad conmutativa

$$\begin{aligned} 0\times 5 &= 5\times 0, \\ &= 0. \end{aligned}$$

En general, para cualquier número entero n,

$$n\times 0=0\times n=0.$$

Propiedad distributiva

La pregunta, ahora, es: ¿Hay alguna conexión entre las operaciones de suma y multiplicación?

Consideremos este problema:

> Tres niños y dos niñas van al zoológico.
> El precio del camión es de diez centavos por persona.
> ¿Cuánto costará a los cinco niños ir al zoológico en camión?

Podemos resolver el problema de dos maneras:

1. Costará 3×10, ó 30 centavos los niños.
   Costará 2×10, ó 20 centavos las niñas.
   Costará $30+20$, ó 50 centavos por todos los niños y niñas.

$$(3\times 10)+(2\times 10)=50$$

2. El número de niños es $3+2$, ó 5.
   Costará 5×10, ó sea 50 centavos por los niños.

$$(3+2)\times 10=50.$$

De esto podemos observar que $(3\times 10)+(2\times 10)=(3+2)\times 10$. Debido a la propiedad conmutativa de la multiplicación, esto puede representarse:

$$10\times (3+2)=(10\times 3)+(10\times 2).$$

¿Son ciertas las siguientes proposiciones?

$$10\times (3+2)=(10\times 3)+(10\times 2) \qquad (3+2)\times 10=(3\times 10)+(2\times 10)$$
$$10\times 5=30+20 \qquad 5\times 10=30+20$$

$$6\times (4+7)=(6\times 4)+(6\times 7) \qquad (4+7)\times 6=(4\times 6)+(7\times 6)$$
$$6\times 11=24+42 \qquad 11\times 6=24+42$$

$$9\times (4+3)=(9\times 4)+(9\times 3) \qquad (4+3)\times 9=(4\times 9)+(3\times 9)$$
$$9\times 7=36+27 \qquad 7\times 9=36+27$$

En general, si a, b y c *son* números enteros, entonces:

$a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$, y $(b+c)\times a=(b\times a)+(c\times a)$.

Esta es llamada la *propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma.* Obsérvese que se puede distribuir de izquierda a derecha, como en las proposiciones de la izquierda de la página, y de derecha a izquierda, como en las proposiciones de la derecha de la página. La proposición de la izquierda es equivalente a la proposición de la derecha, por la propiedad conmutativa de la multiplicación.

Es importante que seamos no sólo capaces de "distribuir la multiplicación respecto de la suma", esto es, ir de izquierda a derecha en la proposición

$$3\times(4+6)=(3\times4)+(3\times6),$$

sino que también seamos capaces de "desdistribuir", esto es, ir de la derecha a la izquierda de la proposición.

Podemos convencernos de la veracidad de la propiedad distributiva, empleando arreglos. Por ejemplo, demostremos (figura 22) que

$$4\times(2+3)=(4\times2)+(4\times3).$$

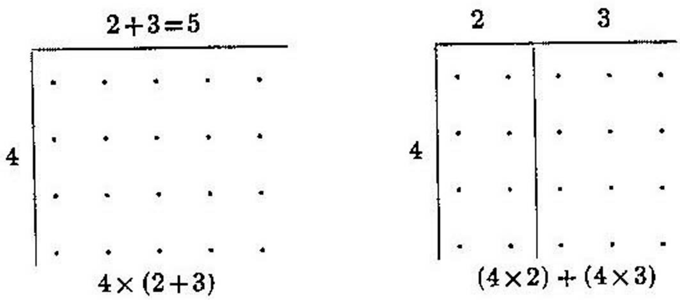


FIGURA 22

El arreglo 4 por 5 puede ser separado mediante una línea vertical en un arreglo 4 por 2 y un arreglo 4 por 3, y el número de puntos será el mismo. Entonces vemos que

$$4\times5=(4\times2)+(4\times3)$$

$$4\times(2+3)=(4\times2)+(4\times3).$$

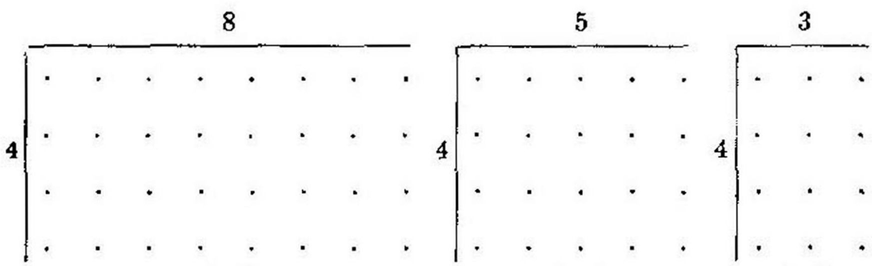
Grupo de ejercicios 5

1. Cuál es el nombre de la propiedad ilustrada en cada una de las siguientes proposiciones:

   a) $6+0=6$
   b) $7\times4=4\times7$
   c) $(13+2)+7=13+(2+7)$
   d) $8\times6=(8\times4)+(8\times2)$
   e) $5\times1=5$
   f) $9+5=5+9$
   g) $7\times24=(7\times20)+(7\times4)$
   h) $3\times(4\times6)=(3\times4)\times6$
   i) $(11\times15)+(11\times25)=11\times40$

2. El conjunto de números enteros entre 0 y 500 ¿es cerrado bajo la operación de multiplicación? ¿Por qué?

3. Considere los tres arreglos de puntos *A, B* y *C*.



4×8 Arreglo *A* — 4×5 Arreglo *B* — 4×3 Arreglo *C*

   a) ¿Cuántos elementos hay en el arreglo *A*, en el *B* y en el *C*?
   b) ¿Es $4\times8=(4\times5)+(4\times3)$?
   c) ¿Qué propiedad está ilustrada en el inciso *b)*?

4. Demuestre cómo la propiedad distributiva puede emplearse para encontrar los productos indicados abajo. (Vea ejercicio 1, inciso *g*).

   a) 7×24
   b) 5×36
   c) 8×12
   d) 9×57

5. Emplee la propiedad distributiva para reescribir cada una de las siguientes expresiones como la suma de dos sumandos.

   a) $7\times(90+6)$
   b) $(30+8)\times4$
   c) $(10+7)\times9$
   d) $(20+6)\times8$
   e) $5\times(50+7)$

6. En cada proposición numérica del cuadro V, sustitúyase n por el número correspondiente, para hacer verdaderas las proposiciones.

CUADRO V

Proposición numérica	*Propiedad*
a) $4\times5=n\times4$	
b) $(3\times4)\times5=3\times(4\times n)$	
c) $7\times1=n$	
d) $4\times10=(4\times5)+(4\times n)$	
e) $7\times n=7$	

7. Use la propiedad distributiva para reescribir cada una de las siguientes proposiciones como producto sencillo.

a) $(8\times2)+(8\times4)$
b) $(3\times5)+(3\times6)$
c) $(9\times6)+(9\times14)$
d) $(15\times2)+(15\times8)$

OPERACIONES INVERSAS

Con frecuencia hacemos algo y luego deshacemos lo que hemos hecho; por ejemplo, abrimos una puerta y la cerramos, nos ponemos un sombrero y nos lo quitamos, caminamos cuatro cuadras hacia el norte y después cuatro hacia el sur. La acción de "deshacer" es llamada inversa de la acción de hacer. Consideremos los siguientes ejemplos:

ACCIÓN	INVERSA
Ponerse un abrigo	Quitárselo
Sentarse	Pararse
Acostarse	Levantarse
Subir tres escalones	Bajar los mismos escalones

No toda acción tiene inversa; por ejemplo, revolver huevos no tiene inversa. No hay manera de revolver huevos y volverlos a su forma original.

Las operaciones aritméticas también tienen inversas. Estudie los siguientes ejemplos.

$(4 + 3) - 3 = 4$	$(3 \times 2) \div 2 = 3$
$(7 - 6) + 6 = 7$	$(6 \times 4) \div 4 = 6$
$(7 + 5) - 5 = 7$	$(64 \div 8) \times 8 = 64$
$(8 - 5) + 5 = 8$	$(9 \div 3) \times 3 = 9$

La operación de sustracción es la inversa de la suma. Sumamos 6 y 4 para obtener 10. Para volver a 6 sustraemos 4 de 10. La suma es una operación con dos sumandos que produce un tercero llamado *suma*. La sustracción es una operación para encontrar un sumando desconocido cuando la suma y uno de los sumandos son conocidos. La división es la operación inversa de la multiplicación. Multiplicamos 3×4 para obtener el producto 12; para volver a 3 dividimos 12 entre 4.

La multiplicación es una operación con dos factores para encontrar un tercer número llamado *producto*. En cambio, la división mediante el producto y un factor conocido nos permite encontrar un factor desconocido. La relación entre las operaciones inversas puede ser ilustrada por los diagramas de la figura 23.

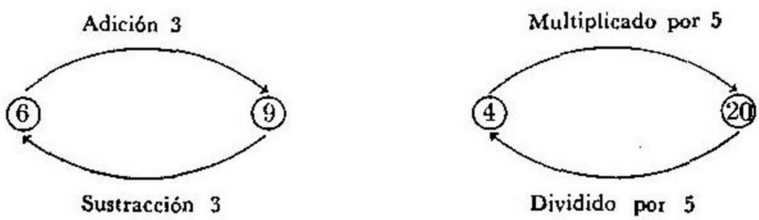


FIGURA 23

Insistir en la relación inversa que existe entre la adición y la sustracción, y entre la multiplicación y la división, es instruirnos ampliamente respecto de la naturaleza de la sustracción y de la división.

Grupo de ejercicios 6

1. ¿Cuál es la operación inversa de cada una de las siguientes?

a) Sumar 3

b) Ponerse los zapatos

c) Marcar algo con un lápiz

d) Sentarse

e) Caminar tres cuadras hacia el sur

2. ¿Cuáles de las siguientes acciones no tienen inversa?

   a) Leer un libro
   b) Prender la luz
   c) Ponerse un abrigo
   d) Cortar el pasto
   e) Viajar de México a Guatemala

3. Aplique la idea de "deshacer" en las siguientes proposiciones matemáticas. Están resueltas la a) y b).

	HACER	DESHACER
a)	$5 + 2 = 7$	$7 - 2 = 5$
b)	$6 - 4 = 2$	$2 + 4 = 6$
c)	$36 \div 6 = 6$	
d)	$4 \times 2 = 8$	
e)	$18 - 8 = 10$	
f)	$25 + 10 = 35$	
g)	$42 \div 7 = 6$	
h)	$9 \times 7 = 63$	

SUSTRACCION

Ahora consideremos la operación de la resta. Si tomamos dos números, 7 y 3, hay diferentes maneras para determinar el número $7 - 3$.

EJEMPLO 1

En términos de conjuntos (figuras 24 y 25) escogemos un conjunto A con 7 miembros, y un conjunto B con 3 miembros; entonces buscamos un conjun-

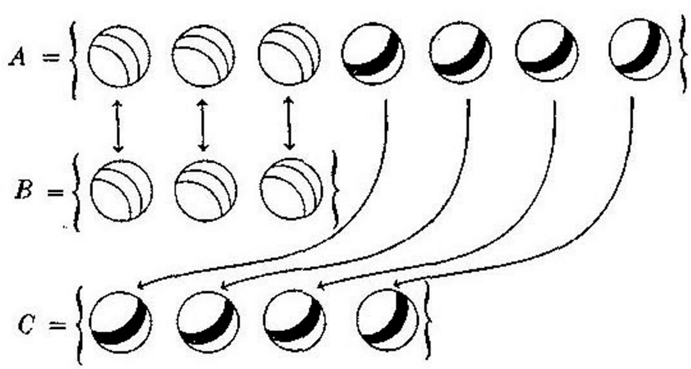


FIGURA 24

to C, tal que B y C sean disjuntos y tales que cuando B y C se unan, el conjunto $B \cup C$ pueda ponerse en correspondencia biunívoca con A.

Hay cuatro miembros en C.

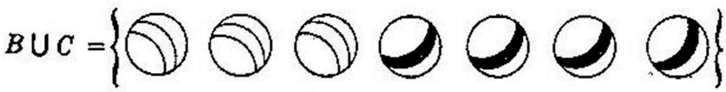


FIGURA 25

EJEMPLO 2

En términos de subconjuntos (figura 26) escogemos un conjunto A con 7 miembros y formamos de A un subconjunto B con tres miembros. Al conjunto restante lo llamamos C y el número de sus miembros es $7 - 3$, ó sea 4.

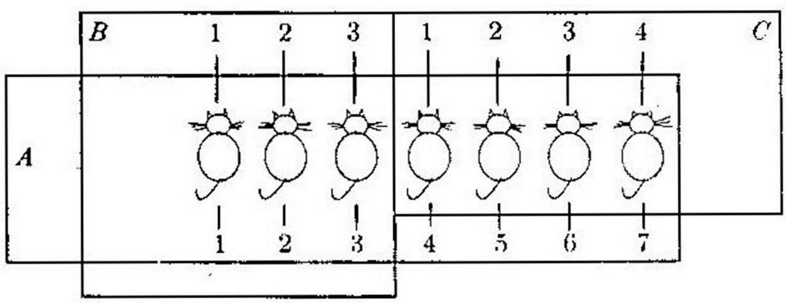


FIGURA 26

EJEMPLO 3

Directamente en términos de suma, decimos que $7 - 3$ es la respuesta a la pregunta "¿qué número añadido a 3 suma 7?"

$$7 - 3 = 4 \quad \text{porque} \quad 3 + 4 = 7$$

Entonces, para encontrar el número $7-3$, podemos ver el proceso de tres maneras:

1. Obtener un conjunto que se pueda aparear con otro conjunto que tenga 7 miembros; para esto debemos unir un conjunto de 3 miembros a otro conjunto de 4, teniendo en cuenta que estos dos últimos conjuntos deben ser disjuntos.
2. Si de un conjunto de 7 miembros, sacamos un subconjunto de 3, el conjunto resultante tendrá 4.

3. El número que debe sumarse a 3 para obtener 7 es 4.

$$7-3=4 \quad \text{significa} \quad 3+4=7.$$

Las tres maneras de ver la resta son importantes.

En general, supongamos que tenemos dos números enteros a y b, que a es mayor o igual que b. (Escribimos "a es mayor que b", así "$a>b$", y escribimos "a es igual a b", así "$a=b$". Algunas veces estos dos enunciados los unimos y escribimos "$a \geq b$" lo cual se lee "a es mayor o igual que b".)

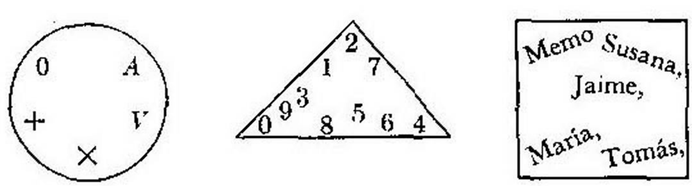
Las tres maneras de determinar el número $a - b$ las sugirieron las ilustraciones previas:

1. En términos de conjuntos, escogemos un conjunto A con a miembros y un conjunto B con b miembros. Entonces buscamos un conjunto C tal que B y C sean disjuntos, y al unir B y C obtenemos el conjunto $B \cup C$, que debe ser tal que pueda aparearse con A. El número de miembros de C es $a - b$. Si $a = b$ el conjunto C escogido no tiene elementos, es el conjunto vacío. Si $b = 0$ entonces C debe escogerse de tal manera que pueda aparearse con A y, por tanto, tendrá a miembros.
2. En términos de subconjuntos, escogemos un conjunto A con a miembros y tomamos del conjunto A un subconjunto B con b miembros. Al conjunto resultante lo llamamos C y el número de miembros de éste es de nuevo $a - b$. Si $a = b$ entonces C no tiene miembros y es conjunto vacío. Si $b = 0$ entonces C debe escogerse de tal manera que se pueda aparear con A y entonces tendrá el mismo número de miembros que A.
3. Directamente en términos de suma, decimos que $a - b$ es la respuesta a la pregunta "¿qué número sumado a b dará a?"

$$a-b=c \quad \text{significa que} \quad a=b+c$$

Grupo de ejercicios 7

1. En cada conjunto de los expuestos a continuación, sustraiga un subconjunto de 4 miembros.



2. Complete el siguiente cuadro.

Sumando conocido	*Suma*	*Proposición numérica*	*Sumando conocido*
a) 15	49	$49 = 15 + n$	34
b) 9	28		
c) 35	76		

3. ¿Qué operación se sugiere en cada proposición numérica? En cada proposición ¿n representa un sumando o una suma?

a) $n + 61 = 75$
b) $4 + 6 = n$
c) $35 + n = 47$
d) $7 - 1 = n$
e) $19 = n + 4$
f) $49 = 36 + n$

4. Use los tres números de cada suma para hacer dos restas cuyo resultado sea un número entero.

a) $9 + 8 = 17$
b) $6 + 7 = 13$
c) $54 + 26 = 80$
d) $37 + 89 = 126$

5. Complete las siguientes proposiciones.

a) $3 + 4 =$ ____
b) $27 -$ ____ $= 10$
c) ____ $+ 7 = 11$
d) ____ $- 7 = 11$
e) $15 +$ ____ $= 21$
f) $36 - 14 =$ ____

DIVISION

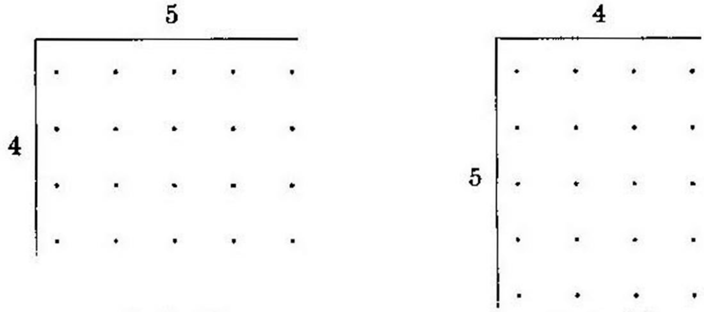
La operación de dividir aplicada a un par ordenado de números (20, 4) puede interpretarse como operación propia para determinar un factor desconocido (en este caso 5) tal que el producto de cuatro y el factor desconocido sea 20.

Recuérdese que el producto de 4×5 puede ser representado por un arreglo (figura 27). Entonces, consideremos la pregunta:

> Si un conjunto contiene 20 elementos y es arreglado en 4 renglones con el mismo número de elementos en cada renglón, ¿cuántos elementos habrá en cada renglón?

o la pregunta:

si un conjunto contiene 20 elementos y es arreglado en renglones, de tal manera que cada renglón tenga 4 elementos, ¿cuántos renglones habrá?

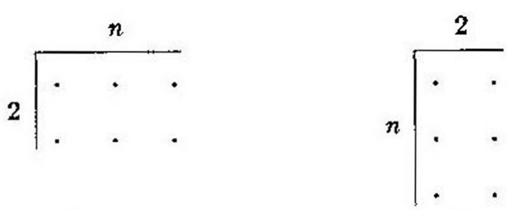


$4 \times 5 = 20$ $\qquad$ $5 \times 4 = 20$

FIGURA 27

La respuesta a cada una de las preguntas es 5. Para muchos pares ordenados de números enteros no habrá respuesta. Por ejemplo, considere el par ordenado (20, 3). No hay arreglo de 3 renglones con el mismo número de elementos, en cada renglón, tal que el arreglo contenga 20 elementos en total. De manera similar para (5, 7) no hay arreglo posible. Para cualquier par ordenado de números enteros en el que a la primera componente es menor que la segunda, la operación de dividir es imposible en el conjunto de los números enteros. Entonces, la división no posee la propiedad de cerradura con respecto al conjunto de números enteros.

El símbolo de la división es $\div$, entonces en la proposición $6 \div 2 = n$, n es ese factor desconocido (si acaso hay alguno) que cuando es apareado con el factor 2 da como producto 6. Considerando esta proposición en términos de arreglo, n es el número de columnas que hay cuando 6 objetos



$6 \div 2 = n$ $\qquad$ $6 \div 2 = n$

$n = 3$ $\qquad$ $n = 3$

FIGURA 28

son arreglados en 2 renglones con el mismo número de elementos en cada renglón, y n es el número de renglones que hay cuando 6 objetos se arreglan en dos columnas, con el mismo número de elementos en cada columna (figura 28).

División se define entonces *como el medio de hallar el factor desconocido de un producto, cuando el producto y uno de los factores son conocidos.*

$$2 \times 3 = 6 \rightarrow 6 \div 3 = 2 \qquad 6 \div 2 = 3$$
$$2 \times 9 = 18 \rightarrow 18 \div 9 = 2 \qquad 18 \div 2 = 9$$
$$5 \times 4 = 20 \rightarrow 20 \div 5 = 4 \qquad 20 \div 4 = 5$$

Entonces, si a y b son números enteros y n es otro número entero

y si $a \times n = b$, entonces $b \div n = a$, y $b \div a = n$.

Las tres proposiciones numéricas son verdaderas por el mismo número n.

EL CERO EN LA DIVISION

El cero presenta un problema en la división. En las siguientes proposiciones:

$$0 \div 2 = n,$$
$$0 \div 3 = n,$$
$$0 \div 5 = n,$$

estamos buscando un factor n tal que

$$2 \times n = 0,$$
$$3 \times n = 0,$$
y $5 \times n = 0,$ respectivamente.

Estas proposiciones son ciertas si y sólo si n es cero. Entonces, cero dividido entre cualquier número natural es cero, (recuerde que 0 no es un número natural). Cero es el único número entero divisible entre cualquier número natural.

Ahora analicemos las proposiciones:

$$2 \div 0 = r,$$
$$3 \div 0 = r,$$
$$6 \div 0 = r.$$

Estamos buscando un número r tal que

$$r \times 0 = 2,$$
$$r \times 0 = 3,$$
$$\text{y} \quad r \times 0 = 6, \quad \text{respectivamente.}$$

Puesto que el producto de cero por cualquier otro número entero es cero, no hay ningún factor r, que haga ciertas a cualesquiera de las proposiciones anteriores. Por tanto, *la división de cualquier número natural entre cero es imposible.*

Hay otro caso especial digno de consideración, que es

$$0 \div 0.$$

En este caso estamos buscando un factor, llamémosle t, tal que

$$0 \div t = 0.$$

Si lo intentamos con algunos números enteros, en lugar de t, tenemos

$$0 \times 5 = 0 \quad \text{cierta}$$
$$0 \times 9 = 0 \quad \text{cierta}$$
$$0 \times 0 = 0 \quad \text{cierta}$$

Puesto que el producto de 0 por *cualquier* número entero es 0, el factor t puede ser cualquier número entero que escojamos, y la proposición

$$0 \times t = 0,$$

será cierta. Por tanto, $0 \div 0$ no indica una división significativa. El símbolo $0 \div 0$ no señala ningún número.

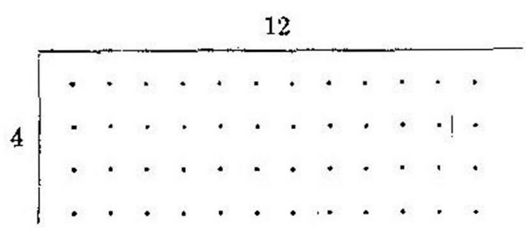
Grupo de ejercicios 8

1. Complete el cuadro que aparece en la siguiente página.

2. Use el arreglo de la derecha para demostrar que las siguientes proposiciones son ciertas.

   a) $48 \div 4 = 12$

   b) $48 \div 12 = 4$



Arreglo	Número de renglones	Número de columnas	Número de elementos	Producto	División
a) · · · · · ·					
b) · · · · · · · · · · · ·					
c) · · · · · · · · · · · · · · · ·					
d) ·					

3. Escriba dos divisiones por cada multiplicación dada en el inciso *b)* y en el *c)*.

   a) $7 \times 9 = 63$ $\qquad$ $63 \div 7 = 9$ $\qquad$ $63 \div 9 = 7$
   b) $6 \times 7 = 42$
   c) $9 \times 8 = 72$

4. ¿Qué operación se sugiere en cada una de las siguientes proposiciones numéricas? ¿Qué representa n en cada proporción: factor, producto, suma sumando?

a) $7 \times 9 = n$
b) $8 \times n = 40$
c) $n + 17 = 23$
d) $n = 5 \times 6$
e) $72 = 9 \times n$
f) $n = 12 + 24$
g) $n \times 8 = 32$
h) $13 + 27 = n$
i) $n + 36 = 40$
j) $24 \div 3 = n$

5. Dibuje un arreglo para ilustrar la proposición numérica.

$$21 \div 3 = 7.$$

6. Use el arreglo que dibujó en el ejercicio 5 para que indique de las siguientes proposiciones las que son ciertas.

a) $21 = 3 \times 7$
b) $7 \times 3 = 21$
c) $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 21$
d) $21 \div 3 = 7$
e) $21 \div 7 = 3$
f) $7 + 7 + 7 = 21$

PROPIEDADES DE LA SUSTRACCION Y DE LA DIVISION

Propiedades de la sustracción

Ahora preguntamos si la resta, operación inversa de la suma, tiene o no alguna de las propiedades de ésta. Observamos que la suma posee las siguientes propiedades:

1. *De cerradura*: La suma de cualquier par de números enteros es otro número entero.
2. *Conmutativa*: La suma de dos números enteros no se altera cuando se cambia el orden de los sumandos; por ejemplo,

$$3 + 2 = 2 + 3.$$

3. *Asociativa*: La suma de tres números no depende del orden en el cual están agrupados; por ejemplo,

$$(4+2)+6=4+(2+6).$$

4. *Elemento idéntico*: Cero es el elemento idéntico de la suma, es decir, la suma de cero y cualquier otro número entero es ese número entero; por ejemplo,

$$6 + 0 = 6.$$

¿La resta tiene las mismas propiedades de la suma? ¿Es cerrado el conjunto de los números enteros, bajo la resta?; es decir, ¿si restamos cualquier número entero a otro, el número desconocido siempre es otro número entero? Probemos con $3 - 7$. ¿Hay un número entero n, tal que $n + 7 = 3$? No lo hay. Puesto que un par de números enteros para el cual el sumando desconocido no es un número entero; de esto concluimos que el conjunto de números enteros no es cerrado respecto a la sustracción.

¿La resta es conmutativa? ¿Es $4 - 3$ igual a $3 - 4$? Sabemos que $4 - 3 = 1$, pero $3 - 4$ no es un número entero, no hay número entero n tal que $4 + n = 3$. De aquí concluimos que la resta no es conmutativa.

La resta de dos números ¿es una operación asociativa? Por ejemplo, ¿es $(8 - 5) - 3$ igual a $8 - (5 - 3)$?

$$\begin{aligned}(8 - 5) - 3 &= 3 - 3\\ &= 0\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}8 - (5 - 3) &= 8 - 2\\ &= 6.\end{aligned}$$

Seguramente $6 \neq 0$ (el símbolo $\neq$ se lee "no es igual a"); por lo que concluimos que la resta no es asociativa.

¿Hay algún elemento idéntico para la resta? Probemos con 0 el elemento idéntico de la suma. Para cualquier número entero n, sabemos que

$$n + 0 = n, \text{ y } 0 + n = n.$$

La definición de la resta nos asegura que

$$n = n - 0.$$

Sin embargo no es cierto que $0 - n = n$.

Propiedades de la división

La división, operación inversa de la multiplicación, ¿qué propiedades tiene?, ¿tiene las mismas propiedades de la multiplicación? Las propiedades de la multiplicación, como sabemos, son las siguientes:

1. *De cerradura*: El producto de cualquier par de números enteros es otro número entero.
2. *Conmutativa*: El producto de cualquier par de números enteros no depende del orden de los factores. Por ejemplo:

$$3 \times 2 = 2 \times 3.$$

3. *Asociativa*: El producto de 3 números no depende del orden en el cual estén agrupados los factores. Por ejemplo:

$$(2\times3)\times4=2\times(3\times4).$$

4. *Elemento idéntico*: Uno es el elemento idéntico para la multiplicación; es decir, el producto de cualquier número y uno es ese número.

$$6 \times 1 = 6$$

¿Es el conjunto de los números enteros cerrado bajo la división? ¿Es $7 \div 4$ un número entero? No lo es, porque no hay un número entero n para el cual $4 \times n = 7$ sea una proposición cierta. ¿Es $1 \div 2$ un número entero? No. Además, hemos visto que la división entre 0 es imposible. El conjunto de números enteros no es cerrado con respecto a la división.

¿La división es conmutativa? ¿Es $6 \div 2$ igual a $2 \div 6$? Sabemos que $6 \div 2$ es 3, porque 2×3 es 6. ¿Hay algún número entero n tal que $6 \times n = 2$? Puesto que no hay ningún número entero n que haga cierta la proposición (3 no la hace cierta) la operación de división no es conmutativa.

La división de números enteros ¿es una operación asociativa? Por ejemplo, ¿es $(24 \div 6) \div 2 = 24 \div (6 \div 2)$?

$$\begin{aligned}(24 \div 6) \div 2 &= 4 \div 2\\ &= 2\\ 24 \div (6 \div 2) &= 24 \div 3\\ &= 8\end{aligned}$$

Seguramente $8 \neq 2$, por tanto, la división no es una operación asociativa.

¿Hay algún elemento idéntico para la división? Sabemos que para cualquier número n,

$$n \times 1 = n, \text{ y } 1 \times n = n.$$

La definición de la división nos asegura que sí:

$$n \times 1 = n, \text{ entonces } n = n \div 1.$$

No es cierto, sin embargo, que $1 \div n = n$.

Las operaciones fundamentales de suma y multiplicación tienen la llamada propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma:

$$3 \times (2 + 6) = (3 \times 2) + (3 \times 6)$$
$$7 \times (8 + 2) = (7 \times 8) + (7 \times 2).$$

En general si a, b y c son cualquiera números enteros, entonces

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c).$$

La multiplicación se relaciona con la resta de la misma manera. Obsérvese que:

$$6 \times (4 - 2) = (6 \times 4) - (6 \times 2)$$
$$6 \times 2 = 24 - 12$$
$$12 = 12,$$
$$3 \times (8 - 5) = (3 \times 8) - (3 \times 5)$$
$$3 \times 3 = 24 - 15$$
$$9 = 9,$$
$$5 \times (7 - 1) = (5 \times 7) - (5 \times 1)$$
$$5 \times 6 = 35 - 5$$
$$30 = 30.$$

En general, si a, b y c son cualesquiera números cardinales y si $b - c$ es un número cardinal (esto es si $b \geq c$), entonces

$$a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c).$$

Grupo de ejercicios 9

1. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones numéricas dan por resultado un número entero?

   a) $23 - 7$
   b) $12 + 3$
   c) $56 \div 8$
   d) 5×4
   e) $16 - 20$
   f) $15 \div 4$
   g) $2 \div 6$
   h) $3 \div 0$

2. Complete el siguiente cuadro:

Proposición numérica	*Propiedad*
a) $5 + 6 = 6 + 5$	*Suma conmutativa*
b) $36 \times 6 = (30 \times 6) + (6 \times 6)$	
c) $47 + 0 = 47$	
d) $3 \times (4 \times 9) = (3 \times 4) \times 9$	
e) $25 \times 1 = 25$	
f) $9 \times 38 = (9 \times 30) + (9 + 8)$	
g) $7 \times 3 = 3 \times 7$	
h) $(6 + 8) + 2 = 6 + (8 + 2)$	
i) $7 \times 99 = (7 \times 100) - (7 \times 1)$	

3. Use la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma para encontrar n en cada una de las siguientes proposiciones:

$$3 \times 57 = (3 \times 50) + (3 \times 7)$$

a) $7 \times 21 = n$ *c)* $43 \times 3 = n$
b) $93 \times 3 = n$ *d)* $125 \times 5 = n$

4. Use la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la resta para obtener n.

$$4 \times 49 = (4 \times 50) - (4 \times 1)$$

a) $8 \times 98 = n$ *c)* $6 \times 48 = n$
b) $5 \times 69 = n$ *d)* $7 \times 19 = n$

5. Llene los espacios para hacer cada una de las proposiciones ciertas.

a) $(36 \div 6) \div 6 =$ ______ $36 \div (6 \div 6) =$ ______
b) $48 \div (8 \div 2) =$ ______ $(48 \div 8) \div 2 =$ ______
c) $(20 - 17) - 3) =$ ______ $20 - (17 - 3) =$ ______
d) $9 - (6 - 3) =$ ______ $(9 - 6) - 3 =$ ______

6. ¿Son asociativas las operaciones de la división y la resta?

7. Ejecute las operaciones indicadas. Use la propiedad conmutativa para obtener el resultado.

a) 9×8 *c)* 23×54
b) $3 + 7$ *d)* $19 + 68$

8. Ejecute las operaciones indicadas y use la operación inversa para verificar la respuesta.

a) $37 - 24$ *c)* 24×3
b) $135 \div 5$ *d)* $45 + 69$

SUMARIO

Números enteros

Número natural: Un miembro del conjunto $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
Número entero: Un miembro del conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
Orden (principio de tricotomía): Si a y b son números enteros, entonces solamente una de las siguientes proposiciones es cierta:

$$a = b,$$
$$a > b,$$
$$a < b.$$

Propiedades de la suma

1. *De cerradura:* La suma de cualquier par de números enteros es otro número entero determinado.
2. *Conmutativa:* Si a y b son cualesquiera números enteros, entonces, $a + b = b + a$.
3. *Asociativa:* Si a, b y c son cualesquiera números enteros, entonces, $(a + b) + c = a + (b + c)$.
4. *Elemento idéntico:* Cero es el elemento idéntico de la suma; para cualquier número entero n, $n + 0 = 0 + n = n$.

Propiedades de la multiplicación

1. *De cerradura:* El producto de cualquier par de números enteros es otro número entero determinado.
2. *Conmutativa:* Si a y b son cualesquiera números enteros, entonces, $a \times b = b \times a$.
3. *Asociativa:* Si a, b y c son cualesquiera números enteros, entonces, $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.

4. *Elemento idéntico:* El uno es el elemento idéntico de la multiplicación; para cualquier número entero n, $n \times 1 = 1 \times n = n$.
5. *Propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma*: Si a, b y c son cualesquiera números enteros, entonces: $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$.
6. *Propiedad distributiva de la multiplicación sobre la resta:* Si a, b y c son cualesquiera números enteros y $b - c$ es un número entero, entonces: $a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c)$.

Operación

Operación: Una operación es la manera de asociar un par ordenado de números con un tercero específico.

Suma: Es una operación binaria que asigna a un par ordenado de números enteros un número entero específico; las componentes del par ordenado son llamadas sumandos y el tercero específico es llamado suma.

Multiplicación: Es una operación binaria que asigna a un par ordenado de números enteros, un número entero específico. Las componentes del par se llaman factores y el número entero específico se llama su producto.

Operación inversa: Una operación inversa es una operación que "deshace" otra operación. La sustracción es la inversa de la suma, y la división es la inversa de la multiplicación.

Sustracción: Es la operación de encontrar un sumando desconocido, cuando la suma y uno de los sumandos son conocidos. Si a y b son números enteros y $a \geq b$ entonces $a - b$ es un número entero, c tal que $b + c = a$.

División: Es la operación de encontrar un factor desconocido cuando el producto y un factor son conocidos. Si a y b son números enteros $b \neq 0$, entonces $a \div b$ es un número entero c (cuando existe) tal que $b \times c = a$.

RESPUESTAS A LOS GRUPOS DE EJERCICIOS

Grupo de ejercicios 1

1. *a)* Suma *b)* 22 *c)* 4 *d)* 16 *e)* Resta *f)* 2 *g)* Multiplicación *h)* 18 *i)* 3 *j)* 6 *k)* 5 *l)* 4

2. *a)* $+$ *b)* $\div$ *c)* $-$ *d)* $\times$

3. *a)* 27 *b)* 9 *c)* 162 *d)* 2

4. *c, f, i.*

Grupo de ejercicios 2

1. $A \cup B =$ {perro, gato, vaca, puerco, pato, caballo, elefante}. El número cardinal de A es 4, el de B es 3, y el de $A \cup B$ es 7.

2. $R \cup S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12\}$.
El número cardinal de R es 6, el de S es 4, y el de $R \cup S$, 10.

3. $W \cup L =$ {todos los caballos blancos}, puesto que L es el conjunto vacío.

4. *a)* 5
b) 5
c) $F \cup G =$ {perro, vaca, caballo, puerco, pavo, gallina, petirrojo, gato}.
d) 8
e) porque F y G no son conjuntos disjuntos.

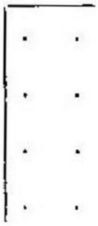
5. *a)* 11
b) Sumando el número de miembros de ambos conjuntos.
c) Porque M y N son conjuntos disjuntos.

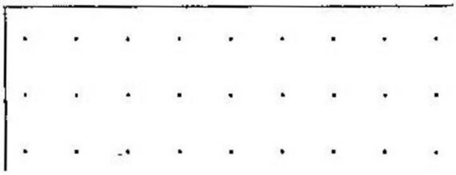
6. 4 0 4

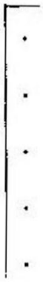
7. $B =$ {guantes}

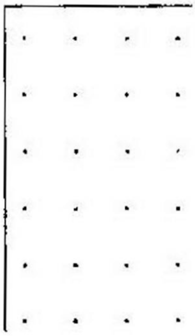
8. *b)* $9 + 6 = n$; 15 *c)* $7 + 3 = n$; 10
d) $2 + 8 = n$; 10

Grupo de ejercicios 3

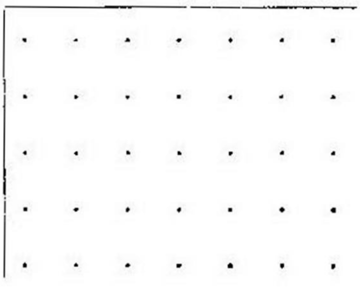
1. a) 

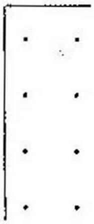
b) 

c) 

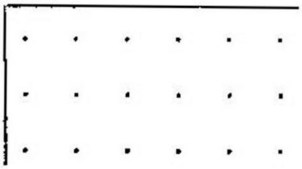
d) 

2. *a)* $4 \times 5 = 20$ *c)* $3 \times 2 = 6$
b) $2 \times 4 = 8$ *d)* $3 \times 3 = 9$

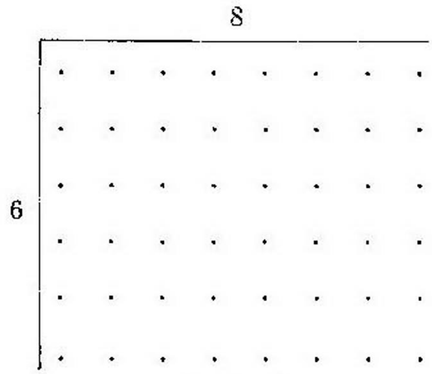
3. a) 

b) 

c) 

d) 

4.



$6 \times 8 = 48$

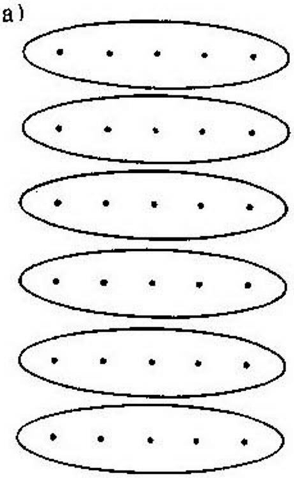
5. $5 \times 6 = 30$

6. 961

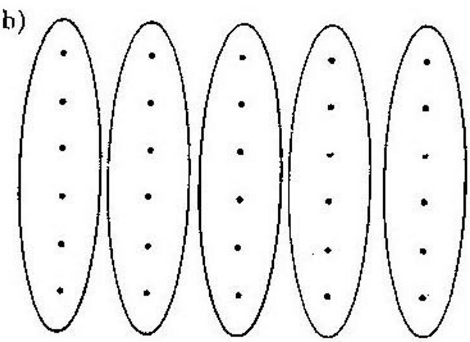
7. *b)* 4; 3; 12 *c)* 5; 6; 30 *d)* 3; 5; 15 *e)* 7; 4; 28

8. *b)* 28
   c) 3
   d) 6
   e) $8 \times 3 = 24$
   f) 6; 6; 4
   g) 5; 5
   h) 5
   i) 3

9.
a)



b)



Grupo de ejercicios 4

1. *b, g*

2. Sí

3. *c, d*

4. 0

5. *a)* $6 + 15 = 13 + 8$

   $21 = 21$

   b) $19 + 2 = 9 + 12$

   $21 = 21$

   c) $10 + 5 = 7 + 8$

   $15 = 15$

   d) $14 + 15 = 20 + 9$

   $29 = 29$

6. *a)* Propiedad conmutativa de la suma

   b) Elemento idéntico de la suma

   c) Propiedad asociativa de la suma

7. *a)* 7, Elemento idéntico

   b) 2, Propiedad conmutativa

   c) 3, Propiedad asociativa

   d) 3, Elemento idéntico

   e) 5, Propiedad conmutativa

   f) 0, Elemento idéntico

   g) *n*, Propiedad asociativa

   h) *b*, Propiedad conmutativa

Grupo de ejercicios 5

1. *a)* Elemento idéntico de la suma

   b) Propiedad conmutativa de la multiplicación

   c) Propiedad asociativa de la suma

   d) Propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma

   e) Elemento idéntico de la multiplicación

   f) Propiedad conmutativa de la suma

   g) Propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma

   h) Propiedad asociativa de la multiplicación

   i) Propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma

2. No. $50 \times 50 = 2\,500$ (por ejemplo)

3. *a)* 33; 20; 12 *b)* Sí *c)* Propiedad distributiva

4. *a)* $7\times(20+4)=(7\times20)+(7\times4)=140+28=168$
   b) $5\times(30+6)=(5\times30)+(5\times6)=150+30=180$
   c) $8\times(10+2)=(8\times10)+(8\times2)=80+16=96$
   d) $9\times(50+7)=(9\times50)+(9\times7)=450+63=513$

5. *a)* $(7\times90)+(7\times6)$
   b) $(30\times4)+(8\times4)$
   c) $(10\times9)+(7\times9)$
   d) $(20\times8)+(6\times8)$
   e) $(5\times50)+(5\times7)$

6. *a)* 5; Conmutativa
   b) 5; Asociativa
   c) 7; Elemento idéntico
   d) 5; Distributivo
   e) 1; Elemento idéntico

7. *a)* 8×6 *b)* 3×11 *c)* 9×20 *d)* 15×10

Grupo de ejercicios 6

1. *a)* Restando 3
   b) Ajustándose los zapatos
   c) Borrando una marca
   d) Parándose
   e) Caminando 3 cuadras hacia el norte

2. *a*, *d*

3. *c)* $6 \times 6 = 36$
   d) $8 \div 2 = 4$; $8 \div 4 = 2$
   e) $10 + 8 = 18$
   f) $35 - 10 = 25$; $35 - 25 = 10$
   g) $6 \times 7 = 42$
   h) $63 \div 7 = 9$; $63 \div 9 = 7$

Grupo de ejercicios 7

1. La respuesta puede variar. Una puede ser:
   {0, *A*, +, *V*} {1, 2, 3, 4} {Tomás, María, Guillermo, Ricardo}

2. *b)* $28 = 9 + n$; 19 *c)* $76 = 35 + n$; 41

3. *a)* Resta; sumando desconocido   *d)* Resta; sumando desconocido
   b) Suma; suma   *e)* Resta; sumando desconocido
   c) Resta; sumando desconocido   *f)* Resta; sumando desconocido

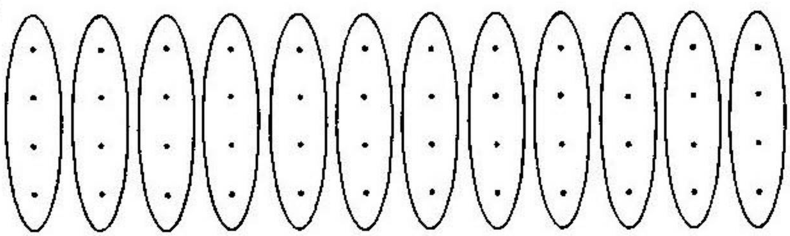
4. *a)* $17 - 8 = 9$; $17 - 9 = 8$ *c)* $80 - 26 = 54$; $80 - 54 = 26$
   b) $13 - 7 = 6$; $13 - 6 = 7$ *d)* $126 - 89 = 37$; $126 - 37 = 89$

5. *a)* 7   *b)* 17   *c)* 4   *d)* 18   *e)* 6   *f)* 22

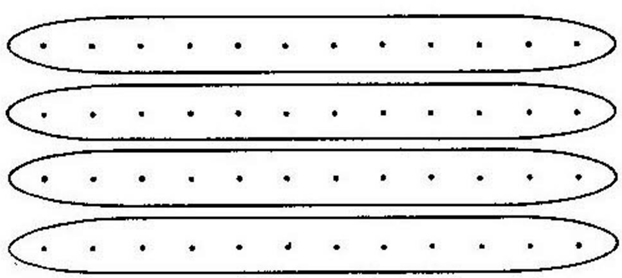
Grupo de ejercicios 8

1. *a)* 2; 3; 6; $2 \times 3 = 6$; $6 \div 2 = 3$; $6 \div 3 = 2$
   b) 4; 3; 12; $4 \times 3 = 12$; $12 \div 3 = 4$; $12 \div 4 = 3$
   c) 4; 4; 16; $4 \times 4 = 16$; $16 \div 4 = 4$
   d) 7; 4; 28; $7 \times 4 = 28$; $28 \div 4 = 7$; $28 \div 7 = 4$

2. a)



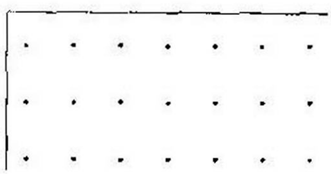
b)



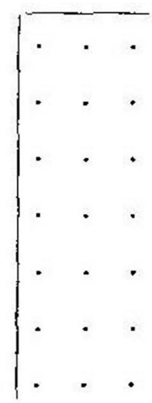
3. *b)* $42 \div 6 = 7$ $42 \div 7 = 6$
   c) $72 \div 8 = 9$ $72 \div 9 = 8$

4. *a)* Multiplicación;   producto
   b) División;   factor desconocido

c) Resta;	sumando desconocido
d) Multiplicación;	producto
e) División;	factor desconocido
f) Suma;	suma
g) División;	factor desconocido
h) Suma;	suma
i) Resta;	sumando desconocido
j) División;	factor desconocido

5. 

o



6. *a, b, c, d, e, f.*

Grupo de ejercicios 9

1. *a, b, c, d.*

2. *b)* Propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma
   c) Elemento de identidad de la suma
   d) Propiedad asociativa de la multiplicación
   e) Elemento de identidad para la multiplicación
   f) Propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma
   g) Propiedad conmutativa de la multiplicación
   h) Propiedad asociativa de la suma
   i) Propiedad distributiva de la multiplicación

3. *a)* $7 \times (20+1) = (7 \times 20) + (7 \times 1) = 140 + 7 = 147$

   b) $(90+3) \times 3 = (90 \times 3) + (3 \times 3) = 270 + 9 = 279$

   c) $(40+3) \times 3 = (40 \times 3) + (3 \times 3) = 120 + 9 = 129$

   d) $(100+25) \times 5 = (100 \times 5) + (25 \times 5) = 500 + 125 = 625$

4. *a)* $8 \times (100-2) = (8 \times 100) - (8+2) = 800 - 16 = 784$

   b) $5 \times (70-1) = (5 \times 70) - (5 \times 1) = 350 - 5 = 345$

   c) $6 \times (50-2) = (6 \times 50) - (6 \times 2) = 300 - 12 = 288$

   d) $7 \times (20-1) = (7 \times 20) - (7 \times 1) = 140 - 7 = 133$

5. *a)* 1; 36 *b)* 12; 3 *c)* 0; 6 *d)* 6; 0

6. No

7. *a)* 72 *b)* 10 *c)* 1 242 *d)* 87

8. *a)* 13 *b)* 27 *c)* 72 *d)* 114